RM
PSPA2
Don de la

JUNTA PARA AMPLIACIÓN DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

Anales: Tomo XIX Memoria 1.ª

A-56
T-3

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

EN LAS

ESCUELAS FRANCESAS

POR

JOSE MARIA DE EYARALAR

Profesor de la Escuela Normal de Palma de Mallorca.

MUSEO PEDAGÓGICO NACIONAL · MADRID ·

MADRID
1924

X

Trabajo presentado por don José María de Eyaralar y Almazán, profesor de la Escuela Normal de Maestros de Palma de Mallorca, pensionado por Real orden de 30 de abril de 1923 para estudiar la organización de la enseñanza de las Matemáticas en Francia.

MUSEO PEDAGÓGICO NACIONAL · MADRID ·

La presente Memoria es el resumen de las observaciones hechas por su autor durante los cinco meses que estuvo en Francia pensionado por la Junta de Ampliación de Estudios. Es puramente informativa, por lo cual está nutrida de ejemplos, y en cambio la crítica se halla reducida a un mínimo, y es casi nula la comparación con nuestras escuelas, que hubiera resultado innecesaria y acaso dolorosa.

La Matemática, como la ciencia más perfecta, es la que más tiempo ha resistido a la invasión pedagógica, y, sin embargo, es en la que, por su misma abstracción, se impone un cambio más radical en los métodos de enseñanza. A ello se tiende, y la ciencia, lógica, deductiva y pura, se transforma en pedagógica experimental y practicista. Y en este período de transición creemos que es interesante y útil conocer la estructura que ha alcanzado en el clásico país del buen sentido, conocidos como son los excelentes resultados de su enseñanza.

I. LAS ESCUELAS MATERNALES

1. Impresión general.—Existentes ya en 1850 como simples salas-asilos, se convierten en 1882, "con programas demasiado ambiciosos" (1), en una extensión de la escuela primaria, resultando "unas veces guardería y otras escuela elemental" (1), percatada de lo cual la autoridad ministerial restringió en 1905

(1) Circular ministerial del 22-11-1905.

los programas, y en 1908 el Comité de Inspectores de las Escuelas maternales los limitó aún más, haciendo resaltar en sus instrucciones el carácter *maternal* que estas instituciones deberían tener.

La impresión que hoy causan es la de hallarse aún en período de tanteos, favorecidos: por la libertad relativa que dejan los reglamentos; por la actuación inmediata y constante de los inspectores, que ponen en su tarea un extraordinario interés; por la misma desorientación de las maestras, preparadas para las escuelas elementales; y por el mismo carácter de la educación en este período, menos *mecanizado* que en cualquier otro, por ser más reciente, sobre todo no habiendo adoptado el Kindergarten, y no siendo las maestras francesas demasiado entusiastas del método Montessori, aun cuando todas las escuelas maternales tengan alguna clase en que se siga.

2. Programas oficiales.—Los de 1908 dividen a los niños en dos secciones: de pequeños y de mayores. Para la sección de pequeños (dos-cinco años) la enseñanza del cálculo se reduce a formar y nombrar agrupaciones de objetos semejantes desde uno hasta 10, empleando como material saquitos individuales con piedrecillas, bastoncitos, conchas y objetos análogos.

La sección de mayores (cinco-seis años) deberá ejecutar: Agrupación de objetos, hasta 50. Obtener la mitad, el tercio y el quinto. Pequeños ejercicios de cálculo mental de las cuatro operaciones, hasta 50. Representación de los números hasta esa misma cantidad. Pequeños ejercicios de cálculo escrito con dibujos representativos.

Ejercicios y juegos con el metro, el franco, el litro y los pesos, utilizando la balanza. La duración de las clases no ha de exceder de veinte minutos, y el programa se advierte que no es sino "un índice de los motivos para conversar ocasionalmente".

3. Tipos de escuelas.—Sin duda existe una gran variedad en las Escuelas maternales, y así, en las visitadas encontramos el tipo de escuela todavía un poco rutinaria, en la que el primer grado es una sala donde los niños están quietos, y el úl-

timo una clase seria, cuya maestra manifiesta que sus niños son capaces de pasar al grado medio de una escuela primaria.

Existe también la Escuela del trabajo, en donde se procura comunicar la menor cantidad posible de conocimientos teóricos, y en donde los niños apenas hacen otra cosa que lindos y fáciles trabajos manuales como, p. ej., tapices y telas de tejido flojo con el primitivo "Jacquard"; el cálculo es aplicado ocasionalmente y en la clase más adelantada se limita la maestra a cumplir el programa oficial haciendo cálculo mental con los 50 primeros números.

Existe también el tipo donde trátase de enseñar lo más posible, pero lo mejor posible, y en donde las maestras, inspiradas principalmente en los procedimientos de Decroly, muestran un ingenio extraordinario para hacer intuitiva, activa y agradable la enseñanza del cálculo.

4. Organización general.—Un primer grado con niños de dos a cuatro años sin ninguna clase de enseñanza; una clase Montessori para niños de cuatro a cinco años donde se sigue el método de la doctora italiana, que las maestras suelen encontrar deficiente en la parte de cálculo y reconocimiento de formas geométricas, ya que los niños aprenden todo ello fácil y rápidamente en medio curso. La sección maternal, formada por los niños de cinco a seis años, que es la que sigue el programa oficial de la llamada sección de *mayores*.

En casi todas las escuelas existen además la *sección infantil* (seis a siete años) y la *clase primera*, de siete a ocho, análogas al curso preparatorio y al primer curso del grado elemental de las escuelas primarias, presentando un caso más de la curiosa superposición que existe entre establecimientos consecutivos. El motivo de ello es el satisfacer el deseo de continuar en la misma escuela, y sobre todo evitar el recargo en los primeros grados de las escuelas primarias, por el hecho sencillísimo de que el número de niños de seis a siete años es mayor que el de niños de once a doce, y el número de clases para unos y otros es el mismo.

La clase típica de la Escuela maternal es, pues, la que lleva

este mismo nombre, en la que se dedica al cálculo un cuarto de hora tres veces a la semana, generalmente de dos y media a tres y media, hora que nos parece poco apropiada para ello, por exigir esta enseñanza mayor esfuerzo de atención, poco compatible con el momento de la digestión y con el cansancio que ocasionó la mañana (1).

5. El programa. — Generalmente desborda los límites del oficial, extendiéndose a los cien primeros grados, con arreglo a un plan bien estudiado, en que la gradación en las operaciones es de una delicadeza extraordinaria, como muestra el siguiente tipo al que hemos reducido los diversos estudiados.

I
- 1.º Los números desde 1 a 9, su nombre y escritura aprendidos simultáneamente.
- 2.º Operaciones de suma y resta en cada número, haciendo así su síntesis y su análisis.

II
- 1.º Los números de 10 a 20.
- 2.º Operaciones.
  - *a)* adición y sustracción sin cambio en las decenas.
  - *b)* adición de números que forman una decena.
  - *c)* sustracción de unidades siendo el resto superior a 10. Repaso.

III
- 1.º Los números hasta 100.
  - *a)* de las decenas hasta 100.
  - *b)* de las decenas y unidades.
- 2.º Operaciones.
  - *a)* adición y sustracción de unidades sin cambio en las decenas.
  - *b)* íd. íd. de decenas y unidades sin íd. íd.
  - *c)* íd. íd. con cambio en íd. Repaso.

IV
- Multiplicación de números cuyo producto máximo suele ser 20, 50 o 100; División exacta teniendo ese mismo límite el dividendo. Obtención de $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ y $^1/_5$.

6. Distribución del programa en el tiempo.—No se hace de él una exposición *seriada* sino cuando esto es indispensable. Para evidenciarlo y dar una muestra de cómo el plan anterior se distribuye en total del curso, exponemos el programa desarrollado en tres semanas:

1.º *Formación y representación de los números de 5 a 9.* Distribución de bastoncitos, juegos de loterías.

---

(1) Trabajos de Wagner citados por P. Barth. *Pedagogía.*

Dibujar grupos de objetos y pedir el total. Las agrupaciones se harán simétricamente, como muestra la fig. 1.

2.° *Revisión de los 9 primeros números.*

3.° *Numeración ordinal.* Dar un número a cada uno de 9 niños, y contarse como si estuvieran en fila por el número recibido.

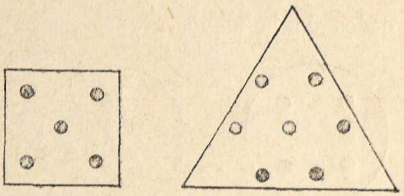


Fig. 1.ª

4.° *La decena.* Dar 9 bastoncitos, uno a uno; luego uno más, atarlos en haz, dar el nombre y escribirlo.

5.° *Sistema métrico.* Ejercicios con monedas, luego con el metro y finalmente con el litro.

7. Los procedimientos y el material.—Tienen por objeto hacer la enseñanza del cálculo variada, entretenida, activa, relacionada con la vida; obligar a los niños a observar, a comparar, a reflexionar, a ver el número por todas partes, permitiéndoles trabajar por sí mismos y corregirse cuando lo hagan mal.

Los fines señalados a esta enseñanza son: 1.° Conocer los números, su orden, formación, propiedades simples y representación. 2.° Percibir la relación entre magnitudes y de éstas con los números. 3.° Aprender a combinar rápidamente los números (1).

A continuación exponemos algunas indicaciones sobre el material que hemos visto, clasificado con arreglo a estos tres fines.

I. Para la noción del número.

Cajitas con objetos en cuya tapa está expresado el número de ellos como se indica (fig. 2) según el grado de abstracción.

---

(1) Mademoiselle Mouflard, inspectora de Escuelas Maternales de la Villa de París. *Bulletin de la Société Alfred Binet.*—Juin-jouillet, 1923.

Dominós de números, dados, palitos o discos; cestitas con frutas, rondas de muñecas con los números escritos en el pecho.

Cartones que presentan los cinco primeros números por los dedos de la mano, grupos de pájaros y series de banderitas.

Fig 2ª

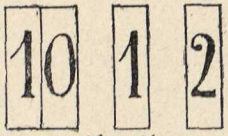


Fig 3ª

Tablitas como las de la fig. 3 para formar con 18 de ellas los cien primeros números.

Tiras de tela de diferente longitud, unas con botones y otras con ojales equidistantes.

Dos bandas de papel unidas, en una de ellas, que se coloca vertical, están los números representados por grupos de objetos, y en la casilla correspondiente de la otra banda se colocan fichas: 1.º, con el mismo número de objetos iguales; 2.º, con objetos diferentes, y 3.º, con el número en cifras (fig. 4).

Fig 4ª

El cinematógrafo numérico, gran cuadro (fig. 5), por cuya

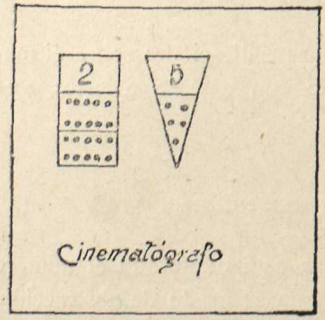


Fig 5ª

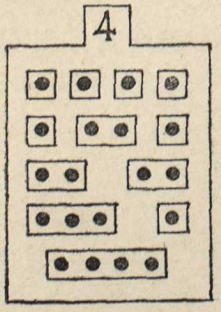


Fig 6ª

porción triangular desfilan las unidades, inscritas sobre un gran

disco accionado por un manubrio. Las decenas se colocan a la derecha.

El análisis y la síntesis del número. Se hace el análisis con cuadros, como el que representa la fig. 6 para el núm. 4, ó con fichas análogas a las del dominó (fig. 7), con una goma que la abraza y puede colocarse a distintas alturas.

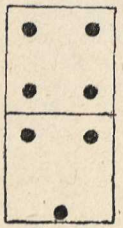


Fig 7.ª

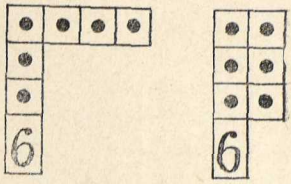


Fig 8.ª

La síntesis se hace intuitiva yuxtaponiendo cuadraditos o cubos, como muestra la figura 8.

II. Relaciones entre magnitudes y de éstas con los números.

Gatos de diferentes tamaños y calderos donde echarlos (*Le chat du père Lustueru*); cestos de tamaños diversos y agrupaciones de manzanas en número diferente; botellas, llenas de vino hasta alturas distintas, y fichas con vasos, habiendo de adjudicar a cada botella el número de vasos que el niño juzgue se llenarían con el líquido de aquélla; casitas de diferentes alturas (fig. 9), debiendo los niños indicar a cuáles de las pequeñas equivale una grande; y algunas otras imágenes, siempre análogas a éstas.

III. Operaciones.

1.° *Adición y sustracción.*—Juego de dominó; juego de dados. Patos que se juntan o se separan. Niño y niña con manzanas que sumar o restar. Cartones, como muestra la fig. 10, con perlas de un solo color para la suma, y de colores diferentes para la resta. Gigantescas margaritas con ligulas separables.

Los barrotes Montessori se han transformado en alguna es-

cuela en reglitas de 10 cm. para uso individual. Cartones que presentan numérica e intuitivamente las operaciones (fig. 11). Otros cartones, como indica la fig. 12, para obtener una suma

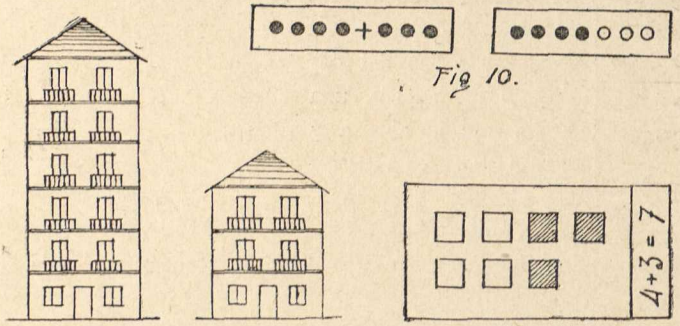


Fig 9ª. Fig 10. Fig 11.

constante: con tiras de cartón se completa el número de imágenes y con una ficha la cifra correspondiente. Se forman con mariposas, conejos, gallos, cerezas, etc.

2.º *Multiplicación.*—Antes de que la doctora Montessori anunciase en su última obra su tabla de multiplicar ya había-

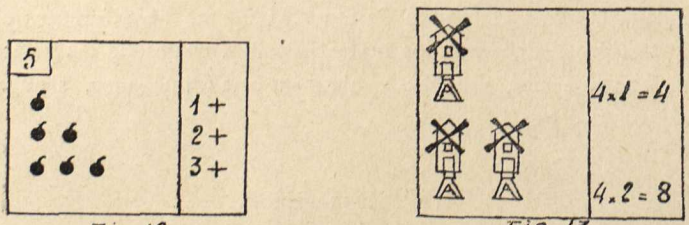


Fig 12. Fig 13.

mos visto en alguna escuela francesa una análoga, formada también por un cuadrado dividido en cien cuadraditos, sobre los cuales se colocaban fichas rojas formando un rectángulo para obtener un producto. También se utiliza la lotería al modo de Decroly, *cantando,* por ejemplo, 5 × 3 en lugar de 15.

Para hacer intuitivo el producto de un número por los demás dígitos se emplean cartones de que da una idea la fig. 13. Pero lo que más agrada a los niños es utilizar el escaparate del panadero, donde los panes son fichas de cartón que se colocan en ranuras, como muestra la fig. 14, según indica la ficha colocada previamente a la izquierda. El producto lo coloca también el niño a la derecha.

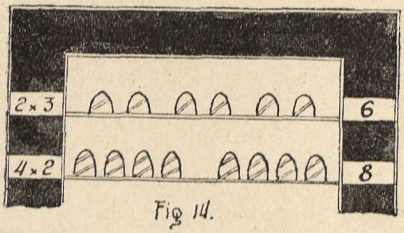


Fig 14.

3.º *División.*—Un gran cartón representando una casa con balcones (fig. 15), cinco para el divisor 5. Fichas en forma de muñecas. Se dan 5, 10, 15, 20; distribuírlas en los balcones en número igual. Más adelante se entrega un número de fichas que no es múltiplo del divisor; el *resto* se coloca en las ventanas. Lo mismo se opera con colecciones de gallinas junto a montones de paja; pobres en fila, carritos alineados... repartiendo huevos, monedas, baulitos, según los casos.

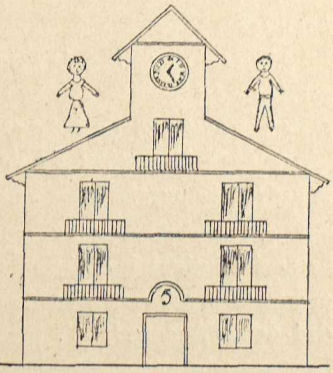


Fig 15.

Material fabricado.—Todo el anteriormente descrito es construído en la misma escuela, utilizando a veces recortes de grabados; las casas editoras, presentan historietas en colores, cada una de las cuales es una operación o problema en acción referente a juegos, escenas de la vida corriente, oficios. Ejemplo: *6* marineros van a embarcarse y tienen *3* botes, ¿cuántos se embarcan en cada uno? En la parte superior está escrito 6 : 3 = 2.

Material recomendado.—Monsieur VANEY, en el *Bull. de la Société Alfred Binet*, correspondiente al mes de octubre de 1922,

presenta el calculador *Mahout*, que dice ensayado con éxito, y consta de una esfera como el reloj, que lleva inscritos el cero y las nueve cifras, y una sola aguja, que recorre la esfera, accionada por un manubrio. Si se quiere, por ejemplo, sumar 3 y 5, se pasa de marcar el 0 a marcar el 3, y luego se recorren 5 lugares, yendo a parar al 8, que es la suma buscada. Así —dice monsieur VANEY— se relaciona la operación mental de sumar con la vista y el sentido muscular del que la ejecuta, y aun del que la ve, por el movimiento que han de hacer los ojos para seguir el de la aguja, y se relaciona el número de unidades con la magnitud espacial.

8. EJERCICIOS.—En la imposibilidad de reseñar todos los posibles con este material, fáciles, por otra parte, de inducir, nos limitaremos a indicar unos cuantos.

I. *Abotonado.*—Ejercicios: 1.º *¿Cuál de las filas de ojales (7-1) corresponde a una de botones?* La comparación se hace primero visualmente, a ojo; después con auxilio del número. *Comprobar.*

2.º *¿Qué dos tiras de ojales pueden abrocharse a una de botones?*

3.º *Dada una tira de botones y otra de ojales, hallar la que completa ésta.*

4.º *¿Qué tira de botones cubre a* DOS *de 3 ojales?*

5.º *¿Cuántas tiras de dos ojales se necesitan para cubrir una de 6 botones?*

Los principios en que se fundan estos ejercicios son: 1.º, hacer instintivos los números y las operaciones; 2.º, hacer las operaciones acompañadas de un ejercicio manual; 3.º, posibilidad del *self-control;* 4.º, preparación para la vida. (Recuérdese que por este mismo título incluye entre sus ejercicios la Montessori uno análogo a éste.)

II. *Tiras de perlas.* Se presenta un cartón como el primero de la fig. 10. Se explica la significación del signo +. Interpretación del cartón: 5 + 3. Se escribe. Se repite a coro. Luego se pone el signo =. Su significación. Luego se cuentan todas las perlas y se escribe el resultado: 5 + 3 = 8.

Con el segundo de los cartones de la misma figura. ¿Cuántas perlas hay? Escribir el número correspondiente. Descontar las verdes. ¿Cómo se escribe *menos?* Escribirlo. ¿Cuántas quitamos? Se cuentan las verdes y se escribe su número. ¿Cuántas quedan? ¿Cómo se pone? Resulta: 7 — 3 = 4.

Después de esto los niños cogen libremente las tiras que quieren (los que están seguros de su pequeña ciencia eligen las más largas) y presentan a la maestra cada tira con la operación escrita que representa. Esto último, como abstracción que es, les cuesta más trabajo, sufriendo equivocaciones curiosas como, por ejemplo, escribir 7 — = 3 4.

III. *Formación del cuaderno del número y del de las formas.* Para obtener el primero se pegan en hojas sucesivas grabados y aun objetos que presenten cada número. Ejemplo: Número 2. Tijeras, balanza, bicicleta... En el de formas se colocan imágenes de objetos que presentan las formas geométricas, juntamente con éstas.

Satisfacen el instinto coleccionador del niño; presentan obra de conjunto; obligan a observar; exigen cuidado en la confección; satisfacen el gusto del niño por las imágenes; se prestan al aprendizaje de nombres y propiedades de los objetos representados, y si además se prefiere coleccionar flores, hojas y aun insectos que respondan a ese fin (por ejemplo, para el 3 la hoja del trébol, para el 7 la del castaño de Indias), el valor de esta colección resulta extraordinario.

9. Comentario.—El cuadro de la enseñanza del cálculo en las Escuelas maternales, que aquí presentamos, es una síntesis de lo bueno observado, por lo cual el nivel medio resulta inferior. Junto a la maestra que penosamente va orientándose y practicando cada vez menos los procedimientos de la escuela primaria, está la maestra ingeniosa, culta, especializada y sostenida, dirigida y *recompensada* por su inspectora, que trabaja maravillosamente; o está el grupo de maestras que secunda con la mejor voluntad el gusto especial que su inspectora tiene por la enseñanza del cálculo. Ahora bastaría un congreso, un cursillo, una exposición y unas nuevas instrucciones para

que el nivel medio alcanzase la envidiable altura que cuanto hemos expuesto implica.

Sin embargo, pudiéramos poner algunos reparos: Faltan los juegos colectivos en que se utiliza el cálculo, como exponen entre nosotros Palau Vera y Nelson. Pudiera emplearse ventajosamente para la adición y sustracción la regla del cálculo que recomendamos en nuestra Aritmética, que responde a la significación geométrica de los números, está relacionada con el sistema métrico y puede utilizarse siempre. Cabría, además, considerar la división no sólo como un *repartir,* sino como el determinar *cuántas veces* (*quoties*), haciendo para ello ejercicios con reglitas.

II. LA ESCUELA PRIMARIA

I. Caracteres generales.

1. Graduación.—Los alumnos que hayan podido asistir a una Escuela maternal no son admitidos en la primaria hasta los seis años y los que no hayan podido hacerlo ingresan a los cinco en la llamada "Sección preparatoria". Los grados que existen necesariamente en toda escuela primaria francesa son: Sección preparatoria (cinco-siete años). Curso elemental (siete-nueve). Curso medio (nueve-once), y curso superior (once-trece), obteniéndose así prácticamente de siete a ocho años de escolaridad.

En cuanto es posible reunir el número de maestros necesarios (que es el caso general en las ciudades), cada uno de los cursos se divide en dos, que se llaman 1.º y 2.º, excepto el superior, en París, que lleva los distintivos B y A. Se obtienen así siete grados, y aun en la escuela visitada (cada una de las de París tiene su especialidad) existe un curso llamado de *pre-apprentissage,* en cierto modo análogo a las secciones de anormales de otros países, pues recoge a los alumnos que no pueden seguir los cursos normales por falta de aptitudes o de escolaridad.

La colocación en cada grado se hace mediante informe de los padres, y si al cabo de algún tiempo se ve que el alumno no puede continuar la marcha de su clase, se le pasa al grado inferior. El tránsito de un grado a otro se hace por la puntuación media alcanzada por el alumno, mas, en esta escuela, por un examen de fin de curso hecho por el Director. El cálculo y la lengua francesa tienen una común preponderancia.

2. El horario.—El trabajo total es de seis horas diarias repartidas en sesiones de a tres horas, que empiezan a las ocho y media de la mañana y a la una y media de la tarde, debiendo cada sesión ser repartida en varios ejercicios diferentes, cortados por recreos reglamentarios, que en el primer curso alcanzan tres horas y media semanales y en el último dos y cuarto. Si comparamos con las escuelas españolas notaremos que en Francia madrugan más, no obstante ser clima más frío, y que el recreo ocupa mucho más tiempo, no obstante trabajar más.

Los ejercicios que exigen mayor atención, dice el reglamento, tales como la Aritmética... se harán por la mañana. La enseñanza de las Ciencias ocupa (según el reglamento vigente de 1923) de una a una hora y media, según los cursos, de las cuales se dedica de tres cuartos a una hora a la Aritmética (incluyendo en este título a la Geometría) y a los ejercicios que a ellas se refieren.

Es de notar que la confección del horario presenta algunas dificultades por la intervención en la enseñanza de los profesores especiales (Dibujo, Gimnasia, Canto, Trabajo manual), que sirven a la vez varias escuelas, lo cual se traduce en la variedad de la duración de las clases y en su distribución, existiendo clases de cálculo por la tarde, contra lo que preceptúa el reglamento.

3. El tiempo.—En la gráfica colocada al final del trabajo puede verse el tiempo total dedicado a la enseñanza del cálculo. Se nota en primer lugar el gran aumento que experimenta con relación al dedicado en la Escuela maternal, un poco en contradicción con la continuidad del proceso educativo. No creemos

que hayan aumentado en tal grado ni la capacidad del alumno ni su necesidad de intensificar en esta materia.

En conjunto, el tiempo dedicado al cálculo en cada curso no aumenta ni disminuye de un modo continuo, cuando la capacidad del alumno va en aumento y los conocimientos de cada orden que va adquiriendo le proporcionan mayor número de motivos para ejercitarlo. Así, sin duda, lo han comprendido los propulsores oficiales de la enseñanza al dedicar al cálculo en el nuevo horario dos y media, tres y cuarto, cuatro y media, y cinco horas semanales en cada grado (1).

En relación con el tiempo total de escolaridad vemos que el cálculo ocupa de un sexto a un quinto, siendo una de las enseñanzas a que se concede mayor importancia, viniendo después de la Lectura y Escritura, y casi al nivel de la lengua francesa, constituyendo con ella los fundamentos de la enseñanza primaria.

Si comparamos el tiempo total de 1.230 horas que habrá dedicado a la Aritmética y Geometría un niño francés, durante su paso por la escuela primaria, con las 1.502 horas que sufre el alumno español, notaremos que los resultados no están en la misma relación, debido sin duda a la diferencia en los métodos empleados.

4. Fines y métodos.—"La escuela primaria —dice el reglamento de 1887, aún en vigor— no da más que un número limitado de conocimientos, elegidos de tal modo que, no solamente aseguren al niño todo el saber práctico de que tendrá necesidad durante su vida, sino que, además, han de obrar sobre sus facultades, formando su espíritu, cultivándole, ampliándole, constituyendo una verdadera educación."

"El único método que conviene a la enseñanza primaria es el que hace intervenir alternativamente al maestro y a los discípulos, que mantiene entre éstos y aquél un continuo cambio de ideas bajo formas variadas e ingeniosamente *graduadas*. El maestro parte siempre de lo que los niños saben, y les conduce, por

(1) Decreto del 23 de febrero del 1923.

el encadenamiento de cuestiones orales o de ejercicios escritos, a descubrir las consecuencias de un principio, las aplicaciones de una regla, e inversamente, los principios y las reglas que han aplicado ya inconscientemente."

"En toda enseñanza el maestro se sirve al principio de objetos sensibles, hace ver y tocar las cosas, pone a los niños en presencia de realidades concretas, y poco a poco les ejercita en comparar, extraer la idea abstracta, generalizar, razonar sin el concurso de ejemplos materiales."

"La enseñanza —resume— ha de ser *intuitiva* y *práctica. Intuitiva,* es decir, que ha de contar ante todo con el buen sentido natural, con la fuerza de la evidencia; *práctica* en el sentido de preparar para la vida."

En nuestra opinión, el primero de los fines propuestos en las instrucciones oficiales, "los conocimientos útiles en la vida", corresponde principalmente al contenido del programa, mientras que la labor de educación intelectual hallará su instrumento en la forma de llevarlo a cabo, esto es: en el plan, el método y los procedimientos.

El contenido de los programas responde bastante bien al fin propuesto. El estudio detallado del sistema y de los números métricos, las reglas de tanto por ciento, las de interés y descuento, el estudio de los fondos públicos, cajas de ahorro, mutualidades, previsión, seguros, repartición de impuestos; las áreas, volúmenes, densidad, planimetría y nivelación, los planos y mapas, la representación proyectiva de las figuras, el cálculo mental y sobre todo los numerosos problemas sacados de la realidad inmediata, preparan al alumno para resolver las cuestiones de orden cuantitativo que se le presentan más adelante en la vida.

Respecto al plan, ya es mucho que la enseñanza sea *graduada* en la forma antes indicada y con los programas que expondremos a continuación; pero además es interesante notar que se lleva de frente el estudio de la Aritmética, Cálculo mental, Sistema métrico y Geometría, de modo análogo como para estas

dos ciencias y la enseñanza secundaria han hecho en Italia Amaldi y Enríquez.

En la escuela visitada por nosotros no tenían los maestros obligación de presentar el programa detallado a realizar en cada época del curso, pero era proyecto del director implantar esta reforma, reconociendo su importancia. Suelen hacerse repasos mensuales y trimestrales y dedicar el último mes del curso a un repaso general.

Cada lección suele consistir: En una apelación a los conocimientos que los niños tienen en relación con lo que se va a enseñar (preparar la apercepción); planteo de una cuestión, generalmente como problema concreto; su resolución por el procedimiento socrático; se obtiene un principio o una regla que se escribe y se aprende de memoria; se proponen cuestiones "de inteligencia" para conocer si está bien comprendido lo anterior; se resuelven dos o tres problemas, a veces inventados por los mismos alumnos; se dicta algún problema para resolver en casa, presentando alguna nueva dificultad por ser caso particular o ampliación de lo estudiado, y sobre cuyas dificultades llama el maestro la atención, creando así disposiciones mentales para resolverlos.

5. Los procedimientos.—a) *Cuadernos individuales y cuadernos de clase.* Cada niño, a su entrada en la escuela, recibe un cuaderno especial que debe conservar mientras permanezca en ella. El primer ejercicio de cada mes en cada orden de estudios es desarrollado por el alumno en este cuaderno, sin auxilio extraño, de modo que el conjunto de estos ejercicios permite apreciar los progresos del alumno, la marcha seguida y el nivel alcanzado, y constituye la mejor de las emulaciones para el alumno, puesto que es la emulación rusoniana consigo mismo.

En el cuaderno de clase, *cahier de roulement,* cada niño, por turno, expone la labor de un día, despertando la emulación entre los niños, y permitiendo al maestro y al director percibir el conjunto de la labor.

Cada maestro lleva además un cuaderno de preparación de clases, así como un diario del trabajo realizado.

b) *Procedimiento Tabereau, de la Martinière.* Adoptado en todas las escuelas primarias francesas, se practica del modo siguiente: Se propone una cuestión. Se asegura el profesor de que la pregunta está bien entendida. Explica el modo de escribir brevemente la respuesta. Deja algún tiempo para pensarla. Da el maestro un golpe en su pupitre y los niños escriben en sus pizarras la respuesta y vuelven lo escrito contra la mesa. Otro golpe y todos los niños levantan la pizarra, volviéndola hacia el maestro. *Ventajas*: Simultaneidad en el trabajo; imposibilidad de copiarse unos a otros; rapidez en los ejercicios y en la percepción del resultado: puede regularse el tiempo empleado, haciendo que sea cada vez menor. Se aplica, sobre todo, el cálculo mental.

Hemos tratado de encontrar el origen de este procedimiento y lo hemos hallado en el método del autor, decano de la Facultad de Ciencias de Lyon, expuesto en un folleto titulado *Exposée de la méthode Tabereau, fondée à l'Ecole de la Martinière, pour l'enseignement préparatoire des Mathématiques*". Así como Pestalozzi quería mecanizar la enseñanza, Tabereau quería militarizarla y decía, por ejemplo, que una regla extensa se divide en varias reglas menores, como se hace la carga del fusil en 12 tiempos, y los ejercicios colectivos regulados por golpes en el pupitre eran su especialidad. Su principio fundamental es que la Matemática se compone de dos partes: una práctica, que sólo exige memoria y vivacidad, y otra teórica, que demanda reflexión. Aquélla debe ir primero para preparar ésta y la enseñanza de sus reglas ha de hacerse sin demostración de ninguna clase, como se hace en Gramática y en Moral, y ha de acudirse a ejercicios colectivos (valor del ejemplo, emulación) que, sin embargo, permitan el *control* continuo, la variedad, y la comprobación inmediata de los resultados obtenidos. De todos los ingeniosos procedimientos inventados, reglas dadas, y tablas construídas ha quedado solamente el procedimiento expuesto.

c) *La representación simbólica y la precisión del lenguaje.* Está en la esencia misma de las Matemáticas la utilización de símbolos, desde los que representan el número hasta las integra-

les múltiples, utilizando en el pensar formas sintéticas desdoblables en sus elementos (economía del pensamiento). Además, en una esfera más modesta, conviene emplear los símbolos porque hacen visibles e inscriptibles las relaciones matemáticas, y permiten representar de un modo claro y sencillo la marcha del pensamiento al demostrar un principio o resolver un problema. En las escuelas francesas se utilizan toda clase de representaciones; como muestra el siguiente ejemplo, que presentamos adaptando a nuestro idioma la relación:

"El beneficio total es igual al precio de venta total menos el precio de compra total"

se escribe BT = PVT — PCT;

de donde se deduce PVT = PCT + BT y PCT = PVT — BT, que el alumno interpreta con toda facilidad.

En cambio en Geometría no emplean los signos | | ⊥ ∽ ⊙ ∆, tan usados en las obras alemanas.

Una de las cualidades más importantes que educa la enseñanza de las Matemáticas es el hábito de hablar con plena corrección, esto es, con las palabras necesarias y suficientes, posible en ella por estar definidos con toda precisión los términos de que se sirve. En las escuelas francesas se dedica a esto un cuidado extraordinario; en la demostración de un principio, en la marcha de un problema, se busca la expresión más correcta y cuando se ha encontrado se repite íntegra. Las definiciones, los principios y las reglas se repiten a coro, se escriben sobre los cuadernos y se aprenden de memoria.

Aparte de la utilidad que esto tiene para el cálculo, constituye un ejercicio de buen decir, y fortifica aquella facultad corrigiendo la tendencia del niño al verbalismo.

d) *La intuición.* En la significación de percepción por los sentidos suele aplicarse siempre que ello es posible, aun reducida a adornar la lección con algún dibujo alusivo. Así, por ejemplo, si se trata de un ejercicio en el que figura un vaso lleno de agua hasta los dos tercios, se dibuja el vaso y se marca la línea de agua; tratando de la variación de las fracciones por aumento de sus términos, se traza una línea horizontal, que representa

el nivel de la unidad; las fracciones mayores se escriben encima y las menores debajo y en cada caso una flecha indica el sentido de la variación. La operación de sumar se hace con ejemplos como el adjunto, donde H representa las decenas y H las centenas.

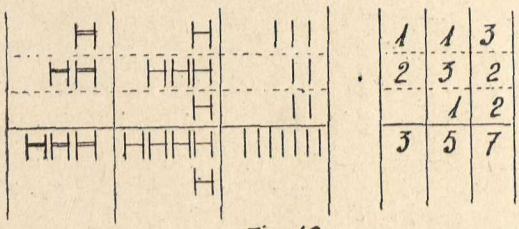


Fig. 16.

Cuando se *llevan* unidades de un orden, la operación se indica haciéndose intuitiva, como muestra la figura adjunta, constituyendo este cálculo con imágenes el grado siguiente al cálcu-

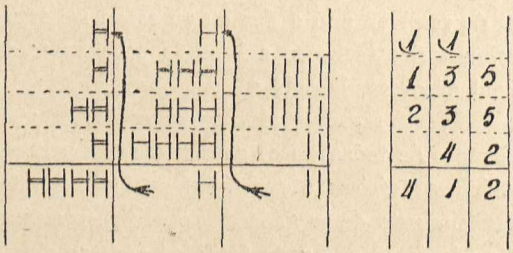


Fig. 17.

lo con objetos, y dentro de él una gradación de complicación creciente.

Sin embargo, aquí, como en la Escuela maternal, pudieran señalarse algunas deficiencias: apenas se emplean los lápices de colores y pocas veces se utiliza la representación geométrica de los números. Así, en el segundo de los ejemplos citados nosotros hubiéramos creído preferible representar gráficamente los quebrados mediante barras verticales, y notar su diferencia con el nivel de la unidad en cada caso. En la demostración del

Teorema de Pitágoras emplean el procedimiento de las cuatro escuadras, cuando es más intuitivo y directo recortar el cuadrado mayor, como muestra la figura adjunta, tomada de Mahler; y la extracción de la raíz cuadrada de un entero se explica sin demostración, mientras que en algunos de nuestros libros (Palau Vera, *Aritmética mercantil*) se halla un procedimiento intuitivo para ello.

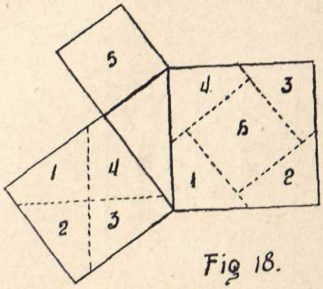


Fig 18.

6. Los ejercicios prácticos.— Constituyen uno de los procedimientos de enseñanza más practicados, hallándose muy generalizada la opinión de Tannery de que "Nada vale, para la formación del espíritu matemático, lo que los problemas de Aritmética y Geometría elemental".

La lección de cada día lleva consigo varios problemas; el alumno ha de resolver uno o dos en su casa; los repasos mensuales y trimestrales se hacen a base de problemas; en el examen de final de curso, llevado a cabo por el director de la escuela, el cálculo está representado por un problema, y, finalmente, los exámenes de todas clases consisten principalmente en resolver problemas *teóricos* o *prácticos,* esto es, que versen sobre el descubrimiento de propiedades o sobre su aplicación. Así los alumnos adquieren una gran facilidad para resolverlos y una gran habilidad para disponerlos ordenadamente, y así se han formado colecciones muy interesantes de numerosísimos problemas referentes a la vida corriente, los negocios, las ciencias, los deportes, la vida social, etc., o de ejercicios teóricos que permiten, de cuestión en cuestión, ensanchar considerablemente el campo del conocimiento. Todo ello merece asentimiento; de este modo se ha formado la Ciencia; sólo lo que se hace por sí mismo se sabe bien; sólo así se relaciona la enseñanza con la vida y se hace activa, progresa el entendimiento, y se hace placentera y educadora la enseñanza al vencer cada día una dificultad.

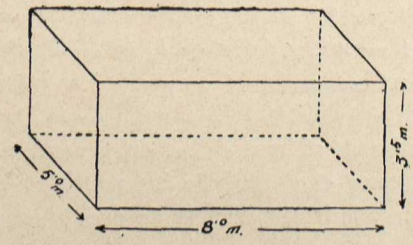
Los problemas más sencillos son los orales; tienen por objeto reconocer si se ha entendido bien la teoría y afirmarla. Para su resolución se emplea el procedimiento Tabereau, y los niños cuyas pizarras presentan malas soluciones salen sucesivamente a resolverlo al encerado guiados por el profesor. A menudo los problemas son inventados por los mismos niños, habituándolos a ello de un modo gradual. Primero se les da un problema-tipo; después otro en el que falten los datos, que han de suplir; más tarde han de inventar un problema con datos que se les da, y, finalmente, han de hacerlo sobre una materia que se les indique sin ninguna sujeción.

Los problemas o ejercicios tienen siempre alguna dificultad que implique esfuerzo de invención por parte del alumno. En clase se resuelve por completo un problema-tipo, del cual no son sino variantes o ampliaciones las que ha de resolver el alumno.

El enunciado toma siempre una forma concreta, por ejemplo: *calcular la longitud* de un alambre que sujeta una chimenea de altura *a* a un punto de un tejado que dista *d* de su pie.

La disposición o buena presentación de un problema es muy cuidada; generalmente se deja un margen a la izquierda para efectuar las operaciones, comprobadas por 9. Se hace una representación gráfica del problema, y si ello es posible se dibuja la planta y alzado del objeto de que se trate, y finalmente se expone la marcha del problema en un principio por el método analítico-sintético, de que damos a continuación un ejemplo, y después exponiendo solamente la síntesis.

Ejemplo: "Calcular el peso del aire contenido en una habitación de 8 metros de larga por 5 de ancha y 3,50 metros de altura, sabiendo que el aire pesa 77 veces menos que el agua.



OPERACIONES

$$\begin{array}{r|l} 140000 & 77 \\ \cline{2-2} 630 & 1818 \\ 140 & \\ 630 & \\ 14 & \end{array}$$

ANÁLISIS

1.° Peso del aire $= \frac{\text{Peso del agua}}{77}$
2.° Peso del agua = Volumen en $m^3 \times 1000$ kgs.
3.° Volumen en m^3 = base $\times$ altura.
4.° Base = largo $\times$ ancho.

SÍNTESIS

1.° Base $= 8 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 40 \text{ m}^2$
2.° Volumen $= 40 \text{ m}^2 \times 3{,}5 \text{ m} = 140 \text{ m}^3$
3.° Peso del agua $= 1000 \text{ kgs.} \times 140 \text{ m}^3 = 140000$ kgs.
4.° Peso del aire $= \frac{140000}{77} = 1818$ kgs.

Nunca encareceremos suficientemente el valor de una marcha como la indicada para resolver un problema, pues traza un camino inalterable, empezando en la última pregunta del problema, y enlazando unas con otras las cuestiones, evita los tanteos, la dispersión de la atención y el esfuerzo inútil.

7. El cálculo mental.—Se practica constantemente, adquiriendo los alumnos una gran facilidad para él, cosa natural por estar en la edad en que se forman fácilmente los automatismos cerebrales. Toda suma, resta o producto de números de dos cifras se obtiene mentalmente, y además se aplica el cálculo mental a aquellos números que aparecen frecuentemente en la vida por representar precios de artículos. como, por ejemplo: 0,25, 0,50, 0,75, 1,25, 1,50, 1,75, 2,50. Se utiliza también en la obtención del tanto por ciento y, finalmente, hasta relaciones algebraicas se aplican al cálculo mental, como, por ejemplo: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$, que sirve para obtener el cuadrado de un número de dos cifras; del valor de $(a - b)^2$ se deduce $9^2 = (10 - 1)^2 = 100 + 1 - 20$, $199^2 = (200 - 1)^2 = 40.000 + 1 - 400$ y de $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$, se obtiene como aplicación $33 \times 17 = 30^2 - 3^2 = 900 - 9 = 891$.

Excepto en estos últimos casos, en general, no se les enseña a los alumnos el porqué de los artificios empleados, lo cual parece contradecir el principio de que la enseñanza ha de

ser racional, y, sin embargo, los niños muestran un gran placer en hacer las operaciones; lo cual, y la utilidad que reporta, hace que se legitime su empleo en los primeros grados, que es donde más se usa. Más adelante el descubrimiento del porqué de estos artificios les resulta grato a los niños y les muestra además el progreso realizado.

8. El material.—Está reducido a los indispensables bastoncitos y sartas de perlas, y a las unidades principales del sistema métrico decimal. Para la mejor comprensión de éste suele haber un dm^2 de alambre dividido en cm^2, así como un dm^3 del mismo material, en el que está indicada la división en cm^3 por pisos y construído el inferior de hojadelata, así como un cubito de un cm^3. Entre el material recomendado encontramos, patrocinado por Laisent, el "Iniciador matemático Camecasse", descrito en un folleto editado por su autor en 1916 con el título de *Notice sur l'Initiateur mathématique, jeu de petits cubes aidant à appliquer dans la famille et à l'Ecole d'Initiation mathématique de C-A Laisent*", con lo cual dicho está el alcance de este material, ya que el libro, cuya aplicación es, está traducido y es conocidísimo entre nosotros.

El material en cuestión está constituído por 1.200 cubitos de un cm^3 próximamente, 600 blancos y 600 rojos, con 288 reglitas, mediante las cuales se ensamblan los cubitos, para lo cual llevan unas ranuras en caras opuestas, pudiendo formar barras, paralelepípedos, cubos y hasta pequeños muebles. Su objeto es simultanear el conocimiento de la numeración, las formas geométricas y el sistema métrico decimal, mediante manipulaciones y material sencillo que permitan la autocorrección. Se aplica a formar pisos, mosaicos, sillas, mesas, una escalera doble; se emplea en el estudio de la numeración (los mil cubitos hacen intuitivo hasta el millar), puede construírse una tabla de multiplicar, es útil para la obtención de volúmenes y pueden formarse por intermedio de los llamados números figurados

$$(a+b)^2 \quad (a+b+c)^2 \quad (a+b)\,(a-b) \quad \sum_{n=1}^{n=n} n \quad \sum_{n=0}^{n=n} 2n+1$$

Un innovador, monsieur Beauvisage, ha propuesto utilizar los aparatos de medidas, termómetro, barómetro, dinamómetro, los órganos de animales y plantas, como elementos que contar, y aumentar los *dones* de Fröbel con las formas cristalinas derivables de la fundamental para el estudio de las formas geométricas.

Aunque no hayamos encontrado este material por ninguna parte, apenas es de lamentar su falta; en cambio hubiéramos deseado hallar figuras de movimiento superponibles y ensamblables para explicar la Geometría, falta mucho más de notar por ser Francia, con monsieur Meray, la iniciadora de la moderna Geometría del movimiento.

9. Los libros.—El libro es en todas las enseñanzas un instrumento de trabajo, y en algunas el más importante. Comprendiéndolo así, los profesores de cada escuela eligen los libros que han de ser utilizados por los niños; el Ayuntamiento de París adquiere el número de ejemplares necesarios, y se entregan a los alumnos, que han de devolverlos al finalizar el curso en buen estado, siendo renovados cada cinco años.

Los utilizados para la enseñanza de las Matemáticas en la escuela visitada por nosotros están editados por la casa Colín y escritos por messieurs Royer y Court. Presentan los tres grados, artísticamente encuadernados (en manos de los niños no han de ponerse sino cosas bellas), con profusión de figuras y adornos de tipo geométrico. La materia está distribuída en lecciones, que marcan claramente el trabajo de cada día, y el de cada mes forma un conjunto armónico, cuyo índice figura al principio con una interesante viñeta alusiva al mes, correspondiente a los trabajos que durante él se hacen en la vida y a la materia que va a estudiarse. Presenta apéndices para los repasos trimestrales y para el de fin de año.

Cada lección contiene: 1.º Ejercicios de observación, imágenes, problemas familiares, ejemplos prácticos de los cuales se saca el asunto de la lección. 2.º Paso a las definiciones y reglas. 3.º Ejercicios de inteligencia que resolver oralmente y en común. 4.º Ejercicios y problemas graduados distribuídos

en dos series correspondientes a los dos cursos de cada grado.

Los ejercicios son muy numerosos (1.488 en el primer grado, 2.430 en el segundo y 2.024 en el tercero) e interesantes, con datos reales, graduados, y con un problema-tipo resuelto para mostrar el método y la disposición más conveniente.

El cálculo mental, bastante completo; el sistema métrico, tratado como sucesivas lecciones de cosas; la geometría empieza por el reconocimiento de las formas (ante todo, la línea recta, tan objetiva como el cubo y más sencilla que él), sigue por la evaluación de la extensión y termina en cada lección con aplicaciones ornamentales.

La expresión es clara, metódica y rigurosa. Tomados en conjunto constituyen, a nuestro parecer, un modelo en su género, sin más defecto que la pequeñez de los caracteres tipográficos, productora de miopes.

Así como la Geografía y la Historia encuentran un agradable y útil complemento en las lecturas geográficas e históricas, la enseñanza del cálculo también la encuentra en el libro de monsieur Macé, titulado *L'Aritmétique du grand-papa, on Histoire de deux marchands de pommes,* escrita en 1862 como un cuento de hadas, lleno de imaginación, de gracia y colorido, en un lenguaje grato a los niños, no teniendo que envidiar nada a los cuentos de Perrault.

En el prólogo se muestra el autor partidario del método histórico que presenta el problema antes que la regla, la cual, a pesar de la edad de los niños a que se dirige, dice que ha de ser obtenida razonadamente. Así lo consigue relatando las aventuras de Ramasse-tout (operaciones de síntesis) y Partageur (las de análisis), auxiliados por su hermana Pinchinette, en la resolución de los innumerables problemas que se les presentan, primero para contar y repartir las numerosísimas manzanas que cosechan, y más tarde, dignatarios regios, en las cuestiones que ante la corte se les plantean, estudiando incluso la numeración, propiedades y operaciones de las fracciones ordinarias y decimales. Más que como libro para aprender es

útil como libro entretenido, aclarativo y sintético. Sin embargo de su valor es poco conocido y menos usado en Francia por ser la enseñanza en la escuela primaria un tanto seca y formalista, en lo que al cálculo se refiere.

10. El certificado de estudios primarios.—Constituye el reconocimiento oficial hecho por el tribunal examinador de que el niño posee los conocimientos propios de la enseñanza primaria. Lo consideramos de gran importancia porque constituye un estímulo para alumnos, maestros y tribunales; permite a la opinión en general y a las autoridades académicas en particular conocer el valor de las instituciones docentes, públicas y privadas, y, finalmente, al enviar las escuelas públicas a sufrir este examen a sus alumnos en las mismas condiciones que las privadas, adquieren un carácter de escuelas libres sujetas al estímulo de la libre competencia, propulsor del trabajo.

El examen en cuestión consta de dos partes. La primera, para los niños de once años cumplidos, consiste, en lo que al cálculo se refiere, en resolver por escrito en cincuenta minutos los problemas de Aritmética y sistema métrico y en un ejercicio de cálculo mental, comprendidos en los programas del grado medio (1). La segunda parte, para niños de doce años cumplidos, no implica sino la resolución en media hora de un problema de Aritmética o Geometría correspondiente al programa del grado Superior. Como vemos, el examen se circunscribe a la resolución de problemas que el tribunal cuida de redactar y que publicados constituyen numerosas e interesantes ediciones. De este modo se consigue el fin principal de la enseñanza en este grado, consistente en que los alumnos sepan resolver razonadamente cuestiones prácticas; prestándose también el procedimiento a determinar si los alumnos han formado los hábitos de orden, método, claridad en el conocimiento y en la exposición que debe inculcar la enseñanza de las matemáticas; evita el memorismo, y, si los problemas no son acertijos, elimina el factor suerte, que hace aleatorio el examen como reactivo.

---

(1) Decreto del 24 de febrero de 1923.

Los problemas propuestos que, por lo general, se adaptan perfectamente a estos fines, tienen, además, una cierta especialización según la localidad, versando sobre cuestiones agrarias en los distritos rurales, y sobre asuntos urbanos e industriales en las ciudades. A continuación damos algunos ejemplos de ellos.

Cálculo mental.

Se compran 15 estéreos de leña a 12,60 francos estéreo y 36 fajos a 0,25 uno. ¿Cuánto se debe pagar? (Ardennes.)

Calcular mentalmente el coste de una ternera que pesa 119 kilogramos a 0,65 pesetas el medio kilo. (Ruy de Dôme.)

Un tratante adquiere un rebaño de 23 ovejas a 40 francos cada una; 3 mueren; vende las que quedan a 52 francos cada una. Calcular su beneficio. (Maine et Loire.)

Explicar cómo se halla por cálculo mental la cantidad de vino a 0,40 francos el litro que puede comprarse con 2,80 francos. (Côte d'Or.)

Problemas escritos.

La sociedad de socorros mutuos de que un alumno forma parte contaba el año último 3.425 afiliados. Ha destinado a fondos para retiros 7.535 francos. Se sabe que la subvención del Estado es 1 franco por cada mutualista más 1/4 de la suma dedicada a retiros. Calcular: 1.º La subvención concedida a la sociedad. 2.º La parte del alumno en esta subvención. (Nord.)

Una familia consume 1 kilogramo de azúcar en 12 días. Por economía reduce el consumo a 1 kilogramo cada 15 días. ¿Cuánto economiza en un año si el azúcar cuesta a 0,75 francos el kilogramo? (Alger) (1).

---

(1) Nótese que los precios son anteriores a la guerra, las fluctuaciones que todavía sufren hace que a veces no se sustituyan por otros, sino que se multipliquen, al proponerlos por un coeficiente apropiado.

Se compran patatas a 6,25 francos el hectolitro y se venden a 1,50 francos el doble decalitro. ¿Cuántos hectolitros será preciso vender para ganar 100 francos? (Haute Loire.)

Un campo rectangular de 72 metros de largo por 32 metros de ancho está plantado de cerezos. Los primeros árboles están a 4 metros de la linde y las filas distan unas de otras 8 metros a lo largo y a lo ancho. El terreno ha costado 80 francos el área. Las plantas valen 120 francos el ciento y un obrero gana 3 francos por cada 8 hoyos abiertos. ¿Qué vale el terreno plantado? (Dibujar una figura.) (Pyrennées Orientales).

Las ruedas de delante de un coche tienen 8 decímetros de diámetro y las de atrás 148 centímetros. Calcular el número de vueltas de las ruedas delanteras cuando las de atrás hayan dado 110 vueltas. (Se tomará $\pi = 3,14$.) (Seine et Marne.)

La ley de Retiros obreros exige una imposición anual de 4,50 francos por cada asalariado menor de 18 años, y de 9 francos por cada obrero mayor de 18 años. Un asegurado que desde los trece años pague la imposición anual hasta los sesenta y cinco años, tendrá derecho a esta edad a una renta anual de 393,87 francos. Calcular el importe total de las imposiciones personales. ¿Cuánto le reportaría anualmente esa suma impuesta al 4 por 100?

En el análisis de una tierra muy pobre se han hallado 4 centigramos de nitrógeno por hectogramo. Esta tierra pesa 3,5 kilogramos por dm^3. Calcular el peso de nitrógeno existente por área en la capa de 20 centímetros de que se alimentan principalmente los cereales. (Orne.)

Un plano de carreteras está a la escala de $\frac{1}{100000}$ Debo ir en en bicicleta de un pueblo, A., a otro, B., cuya distancia sobre el plano es de 3,5 decímetros. ¿Cuánto tiempo emplearé pudiendo hacer 15 kilómetros por hora? (Seine et Marne.)

Una sala de clase tiene 9,80 metros de larga, 5,40 metros de ancha y 3,50 metros de alta. ¿Cuánto se deberá elevar el techo para que cada uno de los 50 alumnos y el maestro tengan 4 m^3 de aire que respirar?

Un matrimonio obrero compra un mobiliario por 600 francos, con un 3 por 100 de descuento si paga al contado. En lugar de eso paga su deuda en dos partes iguales, una a los seis meses y otra al cabo de un año, abonando además 4 por 100 de interés. ¿Cuánto pierde por no pagar al contado?

No constituye, sin embargo, el certificado de estudios primarios la cúspide de la enseñanza primaria, pues la mayor parte de los alumnos continúan un curso más en la escuela en el grado superior A. El progreso que en este año realiza puede notarse comparando con los problemas anteriores los siguientes, tomados del cuaderno individual de un alumno de la escuela visitada.

1.° *a*) Se quiere construír una vasija en forma de tronco de cono de 340,56 litros de capacidad, 7 decímetros de altura y 3 decímetros de radio en la base menor. Calcular el radio de la base mayor. ($\pi = \frac{22}{7}$)

b) Calcular las dimensiones de una cuba cilíndrica de igual capacidad y de altura igual al diámetro.

c) Dibujar la proyección de alzado de ambos.

2.° Calcular la velocidad de una barca que sube 20 kilómetros, por un río de 3 kilómetros por hora de velocidad, y vuelve empleando en total 5 horas.

3.° Calcular la capacidad de una cubeta de albañil de 1 m. $\times$ 0,80 m. $\times$ 0,30 m. en la parte superior y cuyas paredes tienen 45° de inclinación.

Los grados de la escuela primaria.

1. Sección preparatoria (niños de seis-siete años).

El programa oficial.—Según el Decreto de 23 de febrero de 1923, que modifica apenas el anteriormente vigente, la enseñanza del cálculo debe comprender:

Primeros elementos de la numeración; contar objetos, escribir su número primero hasta 10, luego hasta 100.

Pequeños ejercicios de cálculo oral y escrito (sin exceder a 100).

Juntar y separar grupos de objetos, sumas y restas correspondientes.

Contar de 2 en 2, de 3 en 3 y de 4 en 4; multiplicar por 2, 3 y 4.

Dividir grupos de objetos en 2 y 3 partes iguales.

El tiempo dedicado a esta enseñanza es de dos horas y media semanales.

Este programa, excedido ya en la Escuela maternal, lo es aún más en esta sección.

El dibujo y el trabajo manual constituyen, como en los demás grados, una ayuda indirecta para el cálculo y el estudio de las formas.

Una lección: La da un maestro que se siente un poco deprimido al tener que enseñar tales cosas a niños que las consideran un poco sobre ellos. La clase dura media hora, lo que nos parece un poco excesivo.

Objeto: Ejercicios con el número 5.

Material: Las manos, trazos en la pizarra; formaciones adoptadas por los mismos niños.

Marcha: Cuestiones primero concretas, después abstractas. Ejemplo: ¿5 manzanas + 3 manzanas?

Se apuran las combinaciones con los mismos números.

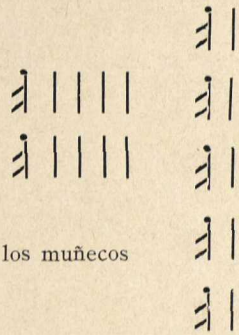
Ejemplo: $5 + 1 = 6$ $1 + 5 = 6$ $6 - 1 = 5$ $6 - 5 = 1$

Lo mismo en las operaciones de segundo grado. Ejemplos: ¿Cuántos dedos hay en las dos manos? ¿Cuántos libros de 2 francos pueden comprarse con 10 francos? ¿Cuántas manos se necesitan para tener 10 dedos?

$5 + 5 = 10$ $5 \times 2 = 10$ $2 \cdot 5 = 10$ $10 : 2 = 5$ $10 : 5 = 2$

El orden de factores no altera el producto. Se dibuja en la pizarra

$5 \times 2 = 2 \times 5$



hasta adoptar la segunda formación.

y se suponen que los muñecos evolucionan

Como los niños no lo entienden, salen de los bancos 10 niños y adoptan las dos formaciones.

La clase era, según nos dicen, de repaso; aun así hubiera convenido dar mayor campo a la intuición y a la actividad del alumno. Relacionar además con otras categorías de conocimientos. Dibujar, por ejemplo, un polígono regular, un triángulo o cuadrado. ¿Cuántos lados tiene el primero más que los otros dos? Presentar modelos de rosas u otras flores pintapetalas. ¿Cuántos pétalos hay en dos rosas? ¿En 3? ¿Cuántas rosas necesitamos para obtener 15 pétalos? Cuestiones análogas con la hoja del plátano o fichas de color, distribuídas a los alumnos para que las ordenasen en filas, hubieran podido evidenciarlos mejor la igualdad $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$ si se juzgaba ello necesario. En este caso mostrar la ventaja que resulta, reduciendo a la mitad la tabla de multiplicar.

No es de extrañar, dado el carácter de las matemáticas y de su enseñanza en Francia, que el grado más elemental sea para ella el inferior, con la excepción, ya hecha, de las buenas Escuelas maternales.

2. Grado elemental (siete-nueve años).

El programa oficial.—1. *Cálculo.* Numeración decimal.—El metro, el gramo, el litro y sus múltiplos. Cálculo oral: Tablas de suma y multiplicación. Las cuatro reglas aplicadas a nú-

meros inferiores a 100. Cálculo escrito: Las cuatro reglas aplicadas a números poco elevados (en la división limitarse a un divisor de dos cifras). Problemas sencillos, orales o escritos, referentes a objetos usuales. Primeros ejercicios de cálculo rápido y de cálculo mental.

2. *Geometría.* Medición de longitudes: medir a ojo y comprobar por medición directa. Dibujar y reconocer las figuras más elementales: triángulo, rectángulo, cuadrado y círculo. Noción del ángulo y de la perpendicularidad. Ideas de las superficies rectangulares por la cuadrícula. Nociones sobre sólidos por medio de modelos en relieve.

3. *Trabajo manual.* Ejercicios fundados en la Aritmética y Geometría.—Figuras geométricas con ayuda de bandas de papel coloreado.—Comprobación de las propiedades de las figuras geométricas por la superposición y reunión de estas figuras y de sus elementos.

El tiempo dedicado semanalmente al cálculo y Geometría es de tres horas y media.

El plan. Para dar una idea de la distribución de estas materias en un curso exponemos la correspondiente al mes de octubre (primero del curso), siendo cada una de sus partes una lección completa.

ARITMETICA	SISTEMA METRICO	CALCULO MENTAL	GEOMETRIA
Los 9 primeros números. Las decenas: De 10 a 20. De 20 a 100. Las centenas: De 100 a 200. De 200 a 1000. Repaso: clase de las unidades.	El metro. El decámetro. El hectómetro. Repaso.	Sumar y restar 2 — — 3 — — 4 — — 5	La línea recta. Verticales, horizontales y oblicuas. Líneas paralelas.

La lección. Primer curso. Unos 40 niños de siete-ocho años. Duración, tres cuartos de hora, tal vez excesiva, aunque las excelentes condiciones del maestro la hicieran agradable.

Objeto. 1.ª parte: Cálculo mental con el número 18. 2.ª parte: División por 8.

Marcha. 1.ª parte: En la pizarra está escrito en colores el número 18 (Refuerzo de la sensación).

Análisis 18 = 1 decena + 8 unidades.

Adición. Se suma 18 con todos los números menores que él, los datos y el resultado se escriben en la pizarra. Los niños repiten a coro la operación y su *porqué*.

Ejemplo: 18 + 1 = 19 porque 8 + 1 = 9.
— 18 + 9 = 27 porque para sumar 9 se aumenta 1 a las decenas y se rebaja 1 a las unidades.
— 18 + 10 = 28 porque 10 + 10 = 20.
— 18 + 11 = 29 porque 10 + 10 = 20 y 8 + 1 = 9.

Sustracción: Se toma 18 como sustraendo, siendo minuendo los números antes obtenidos.

Multiplicación: Se multiplica 18 por todos los números desde 1 hasta 20.

Ejemplos: 18 × 2 = 36 porque 10 × 2 = 20, 8 × 2 = 16, 20 + 16 = 36.
— 18 × 10 = 180 porque para multiplicar un número por 10 se le añade un cero.
— 18 × 11 = 198 porque para multiplicar un número por 11 se pone entre las dos cifras su suma.
— 18 × 12 = 216 porque para multiplicar dos números de dos cifras se añaden las unidades del menor al mayor, se añade un cero, se multiplican entre sí las unidades y se suman los resultados: 18 + 2 = 20, 200, 2 × 8 = 16 200 + 16 = 216 (1).
— 18 × 15 = 270 porque para multiplicar un número por 15 se le añade un cero y se le suma la mitad: 180 + 90 = 270.

2.ª parte. Como preparación y habiendo en cada fila de mesas 8 alumnos, el maestro pregunta cuántos niños hay en 1, 2, 3... o más filas.

Para dividir un número por 8 sigue la regla general, obteniendo para razonarla 8.as partes del divisor, y a fin de hacer intuitivos el cociente y el resto se sirven de la adjunta figura, separando con un trozo de pizarra un número de trazos

Fig 19

(1) La demostración de esta regla poco corriente entre nosotros y aplicable a números menores de 20 es:
$(10 + n)(10 + n') = 100 + 10n + 10n' + nn' = (10 + n + n')10 + nn$

igual al dividendo; el número de filas da el cociente y los trazos de la incompleta el divisor.

3. Grado medio (nueve-once años).

Programa oficial. 1. *Cálculo y Aritmética.* Aplicación de las cuatro reglas a números mayores que en el grado elemental. Números concretos: El tiempo (horas, minutos y segundos). La circunferencia (grados, minutos y segundos). Cálculo de su longitud.

Sistema métrico de base: 10, 100 y 1.000. Múltiplos y submúltiplos.

Cálculo de superficies: rectángulo paralelógramo, triángulo y círculo. Volumen del paralelepípedo, prisma recto y cilindro recto.

Números decimales y fracciones decimales. Idea de las fracciones ordinarias. Práctica de las cuatro operaciones con fracciones ordinarias de términos sencillos. Problemas con datos usuales. Regla de tres y de interés simple. Continuación y ampliación de los ejercicios de cálculo rápido y cálculo mental.

2. *Geometría.* Estudio intuitivo y representación por el dibujo de las figuras de Geometría plana. Nociones sumarias sobre la representación de longitudes, planos y mapas en una escala dada. Nociones prácticas sobre los sólidos geométricos simples (cubo y prismas rectos). Idem sobre su representación geométrica (croquis acotado). Circunferencia: su división en grados. Cuadrado, hexágono regular y triángulo equilátero inscritos en un círculo.

El tiempo dedicado al desarrollo de este programa es de 4 ½ horas semanales.

3. *El Dibujo,* en relación con la Geometría, comprende el dibujo geométrico y el croquis acotado.

4. *El trabajo manual* ejercita en el repaso de las figuras planas, su descomposición y sus relaciones mutuas. Representación y ejecución en cartón de los sólidos geométricos. Desarrollo de sólidos.

El plan. Mes de octubre.

ARITMETICA	SISTEMA METRICO	CALCULO MENTAL	GEOMETRIA
Contar y medir.	Unidades.	Sumar y restar 2, 3, 4, 5	Las líneas rectas y su posición.
Cómo se resuelve un problema.	Medidas de longitud.	— — 7 y 8	Dos ángulos.
Numeración. Clase de las unidades.	Su numeración.	— — 9 y 10	El cuadrado.
Clase de los millares y de los millones.	Medidas reales.	— — un número exacto de decenas y centenas.	El rectángulo.
Escritura y lectura de números enteros.	Medidas itinerarias.	Sumar dos números de dos cifras.	
Numeración de los decimales.		Idem íd. de varias cifras y varios de varias.	
Hacer un número entero 10, 100, 1000 veces mayor o menor.		Sumar números decimales.	
Idem un número decimal.			
Adición: Significación de esta operación.			
Adición de números enteros.			
Adición de números decimales.			
Repaso.			
Las cifras romanas.			

La lección. Primer curso. 40 niños de nueve-diez años. Duración, una hora.

Objeto. Problemas. Un alumno escribe en la pizarra

$$BT = PVT - PCT$$

que traduce: Beneficio total igual a precio de venta total, menos precio de compra total.

Deduce las relaciones derivadas:

$$PVT = PCT + BT \text{ y } PCT = PVT - BT$$

El maestro propone imaginar un problema en que se trate de hallar P C T.

El alumno: "Un comerciante ha vendido 15 m. de paño a 30 frs. el metro (precio actual), realizando un beneficio de 100 francos. ¿Cuál era el precio de compra total?"

El alumno escribe la traducción abreviada del enunciado.

P C = 30 fr.
N m = 15 m
D T = 100 fr.
P C T = ?

A continuación, con un tono un poco maquinal que indica seguir un tipo de expresión y de razonamiento determinado, añade:
Se me pide el precio de compra total, igual al precio de venta total, que no conozco y voy a determinar, menos el beneficio total, que son 100 fr.

P C T = P V T — 100 fr.

"El precio de venta total es igual al precio de un metro (30 frs.), multiplicado por el número de metros

P V T = 30 fr. × 15 = 450 fr.

"Ahora, conociendo el precio de venta total que acabo de hallar, puedo conocer el precio de compra total:

P C T = 450 fr. — 100 fr. = 350 fr.

"La respuesta al problema es: 350 frs."

El maestro apenas interviene, economiza las palabras; cuando el niño duda, le dice simplemente: *a reflechir,* y si no se corrige pregunta a otro. Así el maestro *dirige* el trabajo de la clase.

Otros ejercicios. Fueron propuestos varios del tipo del siguiente: Un objeto ha sido vendido en 37,50 frs., con un beneficio de 5,50 frs. ¿Cuál fué el precio de compra?

Ocasionalmente, se hace la conversión de medidas métricas, como, por ejemplo: ¿Cuántos medios dl. hay en 1 l.? ¿Cuántos medios litros hay en medio Dl.?

Las respuestas se dieron por el procedimiento Tabereau.

Otro problema. El maestro propuso el siguiente: Un comerciante ha vendido 47 m. de tela por 1.857 frs., haciendo un beneficio de 6,90 frs. por metro. ¿Cuál fué el precio de compra total?

La forma en que quedó presentado en la pizarra fué la siguiente:

1.º Se pide el PCT.
2.º PCT = PVT (1857) — BT ... 1857 — 324,30 = 1532,70 fr.
3.º BT = 0P (6,90 fr.) × Nm (47) ... 6,90 fr. × 47 = 324,30 fr.
4.º Respuesta: El precio de compra fué de 1532,70 fr.

OPERACIONES

$$\begin{array}{r} 4{,}7 \\ \times\ 6{,}9 \\ \hline 423 \\ 282\ \ \\ \hline 3243 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1857 \\ -\ 324{,}30 \\ \hline 1532{,}70 \\ \hline 1857{,}00 \end{array}$$

Segundo curso. Niños de diez-once años. Duración, una hora.

Objeto. 1. Ejercicios de cálculo mental. Multiplicación por 0,5, 0,25, 0,125, dividiendo por 2, 4 y 8. Los ejemplos propuestos dan cociente exacto en números enteros. Al resolver un ejemplo el niño repite la regla, que todos los demás enuncian a coro.

2. Cálculo del tanto por ciento. Se escriben en la pizarra las magnitudes que intervienen: "capital, interés, tiempo, tanto por ciento" y se repasan sus definiciones. Se proponen ejercicios graduados escribiendo los datos y el resultado en columna, debajo de los nombres correspondientes.

1.° % en un año: 800 frs. producen 48 en un año. ¿Cuál es el %?

2.° % en varios años: 800 frs. producen 144 en 3 años. ¿Cuál es el %? Se reduce al anterior.

3.° % en meses: ¿A qué % se colocan 600 frs. si producen 21 frs. en seis meses?

4.° El maestro, por vía de experimento, propone: 900 frs. han producido 27,55 frs. en seis meses y diez días, ¿a qué % se ha colocado el dinero?" Indica la marcha: 1.°, hallar el número de días; 2.°, interés en un año; 3.°, hallar el %. A pesar de ello no lo resuelve ninguno. Confiesa el maestro que es ir demasiado de prisa, por faltar un grado = % en días; pero la pregunta le sirve de reactivo, y al ver los alumnos cómo el próximo día resuelven este mismo problema sin dificultad, notan el progreso y les sirve de estímulo.

4. Grado superior (once-trece años).

El programa oficial. 1. *Cálculo y Aritmética.* Operaciones con los números enteros decimales, fraccionarios y concretos. Cálculo de algunas áreas: paralelógramo trapecio, polígono irregular, sector circular, cilindro y cono. Area de la superficie esférica. Volumen de primas, cono y esfera.

Problemas: Solución razonada de problemas sobre interés, descuento, repartimientos medios y densidades. Empleo progresivo de las letras, representaciones gráficas y soluciones algebraicas de los problemas de primer grado.

Continuación y ampliación de cálculo mental y rápido.

2. *Geometría.* Nociones sumarias de Geometría plana. Circunferencia: Su división en 400 grados. Operaciones de Planimetría. Nociones útiles en los ejercicios de Dibujo geométrico. El tiempo dedicado a desarrollar este programa es de cinco horas semanales.

3. *El Dibujo* comprende el geométrico y los croquis acotados.

4. *Los trabajos* manuales desenvuelven el programa del grado medio.

El plan para el mes de octubre comprende:

ARITMÉTICA	SISTEMA MÉTRICO	GEOMETRÍA	NOCIONES DE ÁLGEBRA
Comparación de números.	Nociones históricas.	Las figuras geométricas.	Empleo de letras y signos.
Numeración hablada.	Medidas de longitud.	La línea recta.	Idea de una ecuación.
Idem escrita.	Idem efectivas.	La circunferencia.	Poner un problema en ecuación.
Unidades y números decimales.		Los ángulos, medida y trazado.	Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita.
Prop. de los números decimales.			

El cálculo mental se explica razonadamente como aplicación de las propiedades de los números. La Geometría se estudia dando gran importancia a la noción del movimiento: Desliza-

miento de una recta sobre sí misma, giro de una circunferencia alrededor de su centro, definición del ángulo por rotación, etc.

Las aplicaciones del Algebra se hacen ocasionalmente, resolviendo a la vez un problema por procedimientos aritméticos (falsa posición) y mediante una ecuación de primer grado.

Se inicia la historia de las matemáticas (con mucho acierto, a nuestro juicio, por entrar el alumno en la edad en que aparecen los *intereses humanos*); así, por ejemplo, hace la historia del sistema métrico (aunque no la de la numeración, tan interesante por lo menos como ella) y se da una sucinta biografía de los matemáticos ilustres, desde Pitágoras y Euclides hasta Laplace y Poincaré.

Una lección de primer curso. 42 alumnos de once a doce años. Duración, una hora.

Objeto: 1.ª parte. Corrección de un problema resuelto en la casa. El profesor ha hojeado los cuadernos presentados por los alumnos y puesto nota según el resultado. Todos los alumnos tienen el libro de texto a la vista, sobre el pupitre. Un alumno lee el problema. Otro anota los datos en la pizarra y escribe lo que dicta el profesor. Este guía a la resolución; salpica las preguntas. Los alumnos no preguntados levantan la mano para indicar que conocen la respuesta. Los alumnos van corrigiendo sus cuadernos.

Objeto: 2.ª parte. Concepto del número fraccionario y primeras propiedades. El profesor *mide* la longitud de su pupitre, tomando como unidad la longitud de un cuaderno. Contiene aquélla a éste 3 veces y queda un resto; para apreciarlo divide la longitud del cuaderno por dobleces, en 8 partes iguales, y la del pupitre resulta ser 3 cuadernos y 1/8.

Nombres análogos a fracción: fragment, fracture, efration.

Definición: ¿Cómo se obtienen las fracciones? Conseguida la respuesta correcta, la repiten a coro los alumnos.

Representación gráfica: Se considera la fracción 3/8, representada gráficamente. Nombres de sus términos *deducidos* de su significación, cuya expresión correcta se repite a coro.

Ejercicios colectivos por el procedimiento Tabereau: Repre-

sentar 5/6. ¿Cuántos quintos tiene una unidad? ¿Qué es mayor: 7/8 ó 3/8? ¿Cuánto valen 2 veces 3/7? ¿8/7 es mayor o menor que la unidad? Los niños que se equivocan se corrigen por sí mismos acudiendo a la representación gráfica. Autocorrección preferible por ser hecha por el mismo niño, a base de su propia apercepción, sin elementos extraños, sin coacción, muestra el propio progreso e inpira confianza en sí mismo. La corrección por representación gráfica preferible a todas por intuitiva.

Una lección del segundo curso: 48 alumnos, 3/4 de hora.

Objeto: Triángulos semejantes y sus aplicaciones. Recuérdase que en días anteriores habíase levantado por triangulación el plano del patio de la escuela, que cada alumno había dibujado en su cuaderno. Se recuerda lo *que son* figuras semejantes y *lo que no* lo son (retratos, espejos que aumentan una dimensión). Recuérdase la definición de triángulos semejantes, un poco rara: los que tienen sus ángulos, *respectivamente,* iguales. Puede aceptarse por ser sencilla, verdadera, y suficiente para las aplicaciones, caso corriente en la enseñanza elemental. Precísase la significación de *respectivamente* diciendo que el ángulo mayor del uno ha de ser igual al mayor del otro, de un modo que, aunque no muy correcto, es útil, por salvar este escollo que presenta la forzosa concisión del leguaje matemático. Repásanse las definiciones de *razón* y *proporción,* su propiedad fundamental y la manera de calcular un término de una proporción.

Preparados así los alumnos, se enuncia la propiedad. "Si a un lado de un triángulo se le traza una paralela, se obtiene un triángulo semejante al dado." Demuéstrase por la igualdad de ángulos. Escríbese la proporcionalidad de los lados con excesiva rapidez; sin ninguna aplicación inmediata al cálculo de sus lados se pasa a las

Aplicaciones: 1.ª "Hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles." Explicado como muestra la figura, con valores convencionales.

2.ª "Calcular la altura de un árbol." Hecha como muestra la segunda de las figuras presentes.

Tales aplicaciones apenas tienen valor más que para mostrar cómo pueden obtenerse ciertos resultados con escasos medios. Hubiéramos creído preferible limitarse a hallar la distancia en-

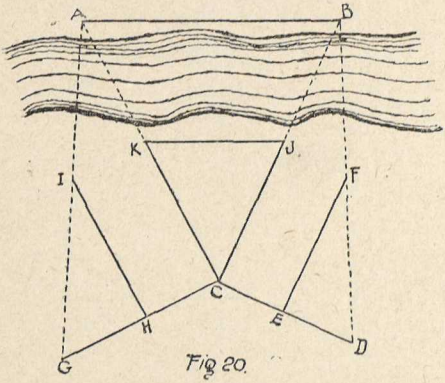


Fig 20.

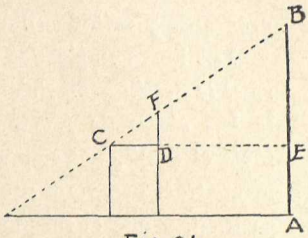


Fig 21.

tre dos puntos, uno de ellos accesible, y resolver la anterior por medio del goniómetro y de la construcción de triángulos semejantes a escala, como se hace en Topografía.

5. El curso especial de "pre-apprentissage".

Establecido en 1919, se nutre de los alumnos del grado medio que no están en condiciones de pasar al superior ni, por tanto, de obtener el certificado de estudios. Dedican al trabajo manual dos horas y media diarias, y alcanzan el certificado en cuestión con escasos fracasos, cosa digna de tenerse en cuenta, porque los exámenes que permiten obtenerlo son teóricos, y en este curso dedican menos tiempo que en el superior B. a la teoría, y se trata, además, de alumnos con déficit mental o falta de escolaridad.

El trabajo comprende el doblado del papel y recortado de cartón, carpintería y trabajo en hierro, en talleres donde cada niño tiene en su puesto todas las herramientas necesarias, más una taladradora y una forja común para todos. La enseñanza de la Geometría y el cálculo se hace ocasionalmente, pues se construyen portarretratos, escribanías, lámparas de mesa, faroles con

soporte, cajas de hierro, etc., y al alumno se le da la planta y alzado del objeto que ha de copiar a mano alzada, y después con instrumentos, tratándose siempre de figuras geométricas: óvalos, elipses, arcos y rectas tangentes, etc., que han de construírse a escala.

Al cálculo y la Geometría ordinaria se dedican tres horas semanales, divididas en cuatro clases de tres cuartos de hora, con programa y métodos del curso superior B.

Los libros empleados son: *Le travail manuel à l'école première et le dessin géometrique,* par July et Rocheron, y especialmente *Les clases de pre-apprentissage, travail manuel aux ateliers (bois et fer)*", por monsieur July, inspector general del trabajo manual del departamento del Sena, editado por la Municipalidad parisién, y que el mismo autor, hombre de extraordinario mérito, tuvo la bondad de proporcionarnos.

6. El trabajo manual.

Constituye una especie de Geometría manual o en acción, tal vez la única que debería enseñarse, facilitando extraordinariamente el estudio de la Geometría teórica, por lo cual damos a continuación el programa desarrollado en los tres grados y un tipo de lección.

El programa.—*Primer año del Grado elemental*: La línea recta, mitad y cuarta parte. Vertical, horizontal y oblicua. Perpendicular, ángulo recto, paralelas. Angulo agudo y obtuso. Perpendiculares no orientadas. Rectángulo, sus ejes. Tejido. Cuadrado; sus ejes y diagonales. El molino de viento. Triángulo; el *videpoches*. Pliegues paralelos a los ejes y diagonales del cuadrado; estrella de cuatro puntos. Cuadrado mitad de otro. Cuadrados imbriscados. Paralelógramo. Triángulo; gorro asirio. Trapecio; el barco; la pajarita.

Segundo año del Grado elemental.—Repaso del anterior. Oblicuas y perpendiculares. La cometa. Evaluación de longitudes. Croquis acotado. Medida de áreas: rectángulo y cuadrado. Cuadro con cruz; el filtro. División de un ángulo en dos y cuatro par-

tes iguales; estrella de cuatro puntas. El triángulo equilátero; estrella de seis puntas. Polígonos regulares. El hexágono, el octógono. El círculo. El cubo; bonete. El paralelepípedo; cajita.

Primer curso del Grado medio.—Repaso. Medidas de ángulos. Comparación de superficies. Rosáceas derivadas del hexágono. Area del paralelógramo, del triángulo y del equilátero. El rombo, el trapecio y su área. Area del polígono irregular, del hexágono y otros polígonos regulares y del círculo.—Segmentos y sectores circulares. Hexágono y octógono estrellados. Corona circular; cocarda tricolor.—Cubo, paralelepípedo, prisma recto de base hexagonal, cilindro y pirámide. Superficie, volumen y representación en perspectiva caballera.

Segundo curso del Grado medio: Repaso. Enlace de curvas y rectas. Simetría con relación a un eje, a dos y a cuatro. Proyecciones. Cono, tronco de pirámides y de cono.

Curso B del Grado superior.—Repaso. Triángulo rectángulo; cuadrado de la hipotenusa. Figuras semejantes. Ovalo, espiral, molduras. Simetría con relación a tres ejes. Paralelepípedo oblicuo. Prisma octogonal. Poliedros regulares. Tetraedro y octaedro.

Curso A del Grado superior.—Repaso. Sólidos truncados. Prisma oblicuo cortado por un plano no paralelo a la base. Cilindro, pirámide y cono truncados del mismo modo.

Ejercicios.—En los que a continuación presentamos puede verse, no sólo la forma en que se desarrollan, sino además la graduación en que se presentan.

Grado elemental, primer curso.— Objeto: El cuadrado; ejes diagonales, pliegues paralelos a los ejes.

Ejecución.—Tomar una hoja rectangular. Sacar de ella un cuadrado. Doblarlo por la diagonal. Juntar *A* con *C*. Doblar el triángulo obtenido de modo que el vértice coincida con el punto medio de la base. Desplegar. (Fig. 22.)

Observaciones.—En el cuadrado se han dibujado las diagonales, los ejes y rectas paralelas a los ejes que determinan un cuadrado cuatro veces menor, siendo sus lados la mitad.

Dibujar la figura correspondiente. (Fig. 23.)

Dibujo de aplicación. (Fig. 24.)

Tanto la hoja de papel como los dibujos que en ella se ha-

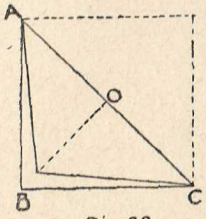


Fig 22.

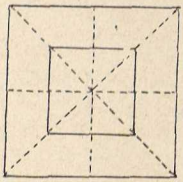


Fig 23.

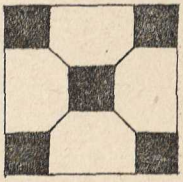


Fig 24.

cen se pegan en una hoja del cuaderno y enfrente los dibujos correspondientes. La decoración suele hacerse con colores complementarios.

Grado elemental: *Segundo curso. Objeto*: el mismo. *Ejecu-*

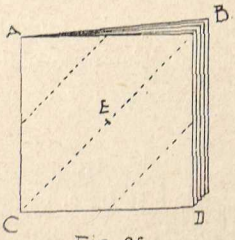


Fig 25.

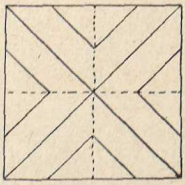


Fig 26.

Fig 27.

ción.—Distribución de una hoja de 80 por 120 mm. Sacar un cuadrado. Doblarlo según un eje, y sin desdoblarlo según el otro. Se obtiene un cuadrado cuatro veces menor. En éste lleva A y D a E. Acentuar los pliegues y desdoblar.

Observaciones. Las diagonales son iguales y perpendiculares, y se cortan en el centro del cuadrado. Lo mismo les sucede a los ejes.

Dibujo. Croquis a mano alzada y reproducción con instrumentos. Mostrar que las líneas principales son las diagonales, y por ellas conviene emplear el dibujo fig. 26.

Dibujo de aplicación.—Fig. 27.

GRADO MEDIO: *Primer curso. Recortado.*—Dibujar con regla y escuadra sobre una cartulina un cuadrado de 10 cm. de lado. Dividirlo en cuadrados de 1 cm. Area del cuadrado.

Dibujar a mano alzada y luego con regla y compás una copia a escala ½.

Dibujo de aplicación, como muestra la fig. 28, para que los alumnos se familiaricen con el uso del compás.

GRADO MEDIO: *Segundo curso. Objeto*: el cubo.—En el primer año se estudió su área, su volumen y su representación en

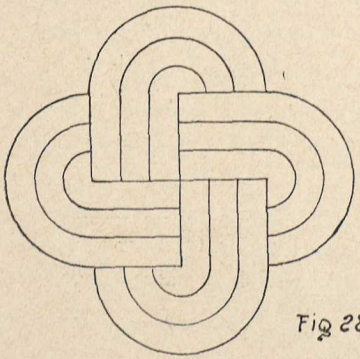


Fig 28.

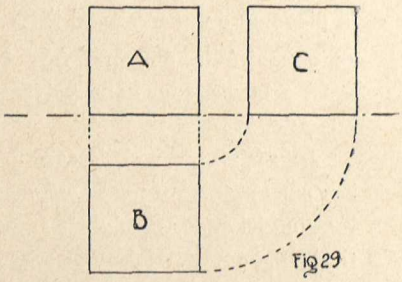


Fig 29

perspectiva caballera. En el segundo se dibuja, a mano alzada, su desarrollo. Se dibuja y después se recorta y construye.

Observaciones. Notar sus elementos, caras, diedros, triedros y diagonales.

Dibujo. Representación del cubo por sus dos proyecciones. Tomar una hoja de cartulina, doblarla en ángulo recto y colocar en su interior el cubo con dos caras paralelas a las de la hoja; notar las proyecciones de cada una, su notación, línea de tierra, significación de las distancias a ella. Se obtiene la fig. 29, donde C es la proyección sobre un plano de perfil.

GRADO SUPERIOR: *Curso B. Objeto*: el cubo.—Construír un cubo, dada su diagonal, sobre un cubo al que se quita una cara; se comprueban las relaciones que muestra la fig. 31, en donde MP

es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, que tiene por lados el

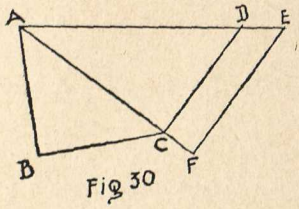


Fig 30

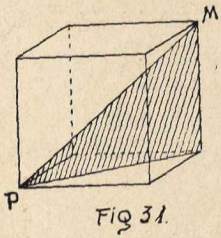


Fig 31.

del cubo y la diagonal de una de sus caras. Constrúyese la figura 30, siendo ABC un Δ isósceles y el rectángulo AC representa la diagonal de una cara, si A B es el lado. Trázase CD $\left\{ \begin{matrix} \perp AC \\ = AB \end{matrix} \right.$ y se obtendrá la diagonal AD del mismo cubo. Tomando AE, igual a la diagonal dada y trazado EF | | DF, EF será el lado buscado.

Dibujo: Trazar el desarrollo del cubo y construírlo. Comprobar que el Δ AEF puede colocarse en su interior. Obtener la proyección del cubo, siendo sus caras verticales oblicuas al plano vertical. Fig. 32.

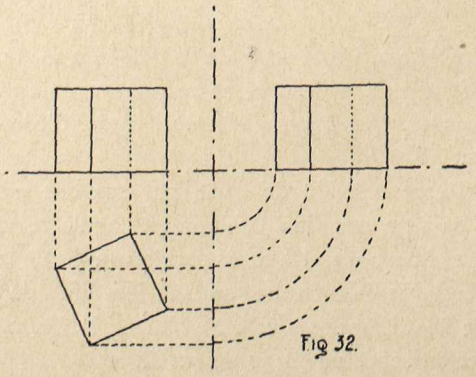


Fig 32.

GRADO SUPERIOR: *Curso A. Objeto*: el cubo.—Construír un cubo sobre la suma de dos longitudes, *a* y *b*.

Constrúyase:

un cubo de arista a.
tres paralelepípedos de base a^2 y altura b.
tres — — b^2 — a.
un cubo de arista b.
un — — $a + b$, abierto por una cara y que encierre los ocho sólidos.

Dibujo: Representar cada sólido por separado y el conjunto en perspectiva caballera. Obtener las proyecciones del cubo, reposando por una arista sobre el plano horizontal y siendo dos de sus caras perpendiculares a él. Fig. 33.

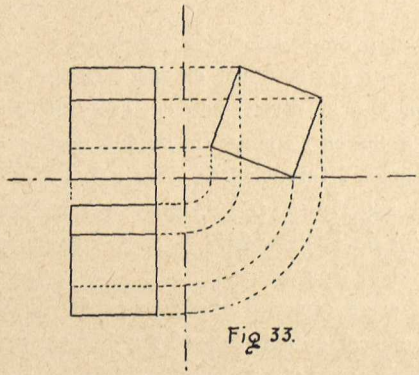


Fig 33.

El estudio de la Geometría proyectiva, tan útil en las artes, creemos deberá hacerse en las escuelas con la extensión que los anteriores ejemplos muestran.

7. Comentario.—Después de lo dicho no creemos necesario hacer notar el alto nivel que alcanza en la escuela primaria francesa la enseñanza de las matemáticas, ni hacer el elogio de sus excelentes métodos y de sus muy competentes maestros. Dado el tipo intelectualista de la escuela francesa, todo, o casi todo lo visto y transcrito nos parece bien. Por otra parte, pocos son los reparos que hemos de poner. Tal vez el temor al *surmenage* en los niños; algunas deficiencias en los primeros grados por acudir demasiado rápidamente a la abstracción; quizás es escasa la tendencia a las aplicaciones mecánicas de la Geometría, ya que no hemos oído nada referente, por ejemplo, a la indiformabili-

dad del triángulo, a la conservación del paralelismo en las definiciones del paralelógramo, etc. Faltan figuras geométricas de gran tamaño, movibles, que hagan intuitivos los movimientos y las superposiciones. La Geometría conserva el carácter estático un poco anticuado; se enlaza poco con la Aritmética; escasean las representaciones gráficas y falta en absoluto la resolución gráfica de problemas, aunque ya se proponga ésta en las revistas que orientan al Magisterio.

III. Las escuelas primarias superiores.

1. Caracteres generales.—Ingresan en ellas los alumnos que han terminado sus estudios en las escuelas elementales, si bien basta para ello el centificado de estudios primarios y el haber asistido a un curso superior de los dos que tienen.

Existen algunas diferencias de organización entre las diferentes escuelas superiores, por lo cual nos limitaremos a exponer lo esencial de la llamada J-B Say, visitada por nosotros y que representa el tipo general.

Constituyen estas escuelas una especie de enseñanza secundaria realista, con el carácter común a las escuelas francesas de ser preparatorias para otras especiales, y tienen una sección de cultura general que constituye un bachillerato abreviado de carácter práctico.

El cuadro adjunto muestra las diferentes secciones organizadas en esta escuela con el número de clases, de 50 a 60 alumnos que cada sección comprende.

Cursos	Secciones.				
	Artes y Oficios.	Comercio.	Enseñanza general.	Física y Química	Agricultura
1°	6	Clases iguales.			
2°	3	1	1	1	—
3°	2	1	1	1	—
4°	2	—	1	1	1
5°	Preparación de Arquitectos é Ingenieros.				

El interés especial que para nosotros presentan estas escuelas está en que constituyen la preparación para el ingreso en las Escuelas Normales, para lo cual siguen los futuros aspirantes

los tres cursos de enseñanza general, y ellos son los que forman el cuarto curso, durante el cual el trabajo se especializa en la dirección del examen de ingreso. Llenan así estas escuelas en la formación del maestro el vacío que hay en nuestra enseñanza entre la escuela primaria y la Normal; si bien es preciso hacer constar que lo llenan demasiado bien, pues según afirman sus profesores, y puede colegirse por el examen de cuadernos, programa y libros, los alumnos que salen de esta escuela no han de hacer en la Normal si no repasar lo ya sabido, y trabajar en la metodología de la asignatura.

Los profesores son especializados; los de Matemáticas tienen diez y ocho horas de clase semanales, y además existen profesores repetidores para los alumnos internos o semiinternos, a los que vigilan y auxilian en los estudios, y cuya labor es tan apreciada, que suele decirse: Tanto vale el repetidor, tanto vale la clase.

Una observación digna de notarse es que los mejores alumnos y los más numerosos son los de Artes y Oficios, y los menos y los peores los del Magisterio, cuando anteriormente sucedía lo contrario.

Las notas. Cada alumno recibe un librito de escolaridad en el cual se inscriben las notas que obtiene. El profesor pone a cada alumno a quien pregunta o que presenta un problema una nota que hace pública. Cada semana, en el cuarto curso, y con menos frecuencia en los anteriores, se interroga a tres o cuatro alumnos con arreglo a un programa previo y a problemas sacados a suerte, cuyos enunciados, con la calificación obtenida, se conservan en un cuaderno que el profesor presenta al prefecto de estudios de la Escuela. Un alumno no puede pasar de un curso a otro sin haber obtenido en conjunto durante todo él la nota media. De este modo, el alumno sabe en cada momento su situación, ningún instante puede descuidarse, y el conocimiento de la opinión que el profesor forma de su trabajo es un constante estímulo.

El tiempo. Las Matemáticas son el estudio a que se atiende más en estas escuelas, dedicándolas semanalmente en los cursos

sucesivos cuatro, cinco y seis horas, en clase de una hora y de hora y media de duración.

2. PROGRAMAS OFICIALES.—*Primer curso*: *Aritmética.* Numeración decimal de los números enteros. Sistema decimal de medidas legales: metro, gramo, litro, franco (múltiplos y submúltiplos usuales). Expresión de longitudes, masas, capacidades y dinero por números, con coma. Números decimales. Definiciones y reglas de las operaciones siguientes: adición, sustracción, multiplicación de números enteros y decimales. Definición y reglas de la división de números enteros. Operaciones fundamentales. División de números enteros en menos de 0,00...01. División de números decimales en menos de una unidad y de 0,00...01. Propiedades de las sumas, diferencias y productos; propiedades de los cocientes exactos. Sistema de medidas legales de base ciento (expresión de superficies) y de medidas legales de base mil (expresión de volúmenes). Los números decimales escritos como fracción decimal. Operaciones con las fracciones decimales. Fracciones ordinarias. Definiciones y reglas de las operaciones con las fracciones ordinarias. Conversión de fracciones ordinarias en decimales, ya exactamente, ya con una aproximación decimal dada.

Algebra. Elementos de cálculo algebraico limitados a su aplicación o ejercicios prácticos (empleo de letras, signos, simplificación, sacar factor común, ecuación de primer grado, sistema de ecuaciones de primer grado, problemas sencillos).

Nota. El estudio del precedente programa debe ocupar apenas la mitad del tiempo previsto por el horario. El tiempo disponible estará consagrado: 1.º, a ejercicios de cálculo mental; 2.º, a la corrección de problemas de Aritmética (regla de tres, interés simple, descuento comercial, fondos públicos, repartimientos proporcionales y mezclas).

Geometría. Geometría plana. Uso de la regla, escuadra, compás y semicírculo graduado. Línea recta, ángulos, triángulos. Casos de igualdad de triángulos. Perpendiculares y oblicuas; paralelas, paralelógramo, rombo, rectángulo, cuadrado. Circunferencia. Relaciones entre arcos y cuerdas. Secante, tangente, condiciones

de contacto y de intersección de dos circunferencias. Medida de ángulos centrales: grados sexagesimales y centesimales. Medida de ángulos inscritos. Angulos de un triángulo equilátero de un cuadrado, de algunos polígonos regulares; ángulos utilizados en la práctica; las diferentes escuadras. Construcciones gráficas y problemas diversos.

Proyecciones. Estudio experimental de la proyección de un punto y de una recta limitada sobre un plano vertical y sobre un plano horizontal unido al primero mediante una charnela. Rebatimiento de éste sobre aquél, línea de tierra, líneas de construcción, lenguaje convencional. Proyección de una superficie plana limitada por una figura geométrica. Proyección horizontal y vertical de un sólido geométrico simple: cubo, paralelepípedo, prisma recto. Aplicación a los trabajos manuales.

Trabajos manuales (cuatro horas semanales).

Trabajo en cartón. Recortado de figuras geométricas, después de dibujarlas con exactitud: cuadrado equivalente al doble y a la mitad de uno dado; figuras que presentan ángulos de 90°, 45°, 60°, 120° y 135°. Reproducción mediante el plegado de los mismos ejercicios: rosáceas cuadradas, hexagonales, octogonales, etc. Ejercicios sobre la construcción de triángulos: suma de los tres ángulos, cuadrado de la hipotenusa, triángulo equilátero máximo inscrito en un rectángulo, etc. Desarrollo de la superficie y construcción de los sólidos geométricos siguientes: paralelepípedo recto, cubo de arista dada, cubo cuya arista es igual a la suma o diferencia de otras dos. Pirámide y prisma recto de la misma base y la misma altura; comparación de volúmenes. El mismo ejercicio para el cilindro y el cono.

Segundo curso: *Aritmética y Algebra.* Razones y proporciones. Magnitudes directamente proporcionales; magnitudes inversamente proporcionales. Nociones elementales de cálculo algebraico aplicables a los números positivos y negativos y a operaciones algebraicas sencillas (no se hablará del caso general de la multiplicación y división de polinomios). Resolución de la ecuación numérica de primer grado. Su interpretación gráfica por la representación de la función $a x + b$ de coeficientes numéricos

(este estudio, como los sucesivos, se hace tomando como punto de partida en cada caso un problema de Aritmética, Geometría o Física). Resolución de un sistema de dos ecuaciones numéricas de primer grado con dos incógnitas. Práctica de la extracción de la raíz cuadrada. Práctica de la resolución en diversos casos de una ecuación numérica de segundo grado.

Nota. La mitad del tiempo deberá consagrarse: 1.°, a ejercicios de cálculo mental y cálculo rápido; 2.°, a la corrección de problemas; 3.°, a interrogatorios de examen.

Geometría. Líneas proporcionales. Triángulos semejantes: casos de semejanza. Figuras semejantes. Relaciones métricas en un triángulo rectángulo y en un triángulo cualquiera. Problemas y construcciones gráficas. División de rectas en partes proporcionales; cuarta proporcional y media geométrica. Construcción de triángulos y polígonos semejantes a otros dados. Polígonos regulares: cuadrado, hexágono, triángulo equilátero. Definición y valor de π (dése en menos de 0,0001, pero sin entrar en detalles de cálculo). Definición de las líneas trigonométricas de un ángulo con ayuda de un triángulo rectángulo por las relaciones de los catetos con la hipotenusa y de los catetos entre sí; uso de las tablas logaritmo-trigonométricas usuales. Resolución de un triángulo rectángulo conociendo un lado y un ángulo, o dos lados. Area. Evaluación de las áreas del rectángulo paralelógramo, triángulo, trapecio, polígonos, círculo, sectores y segmentos de círculo. Relación de las áreas de dos figuras semejantes.

Tercer curso: *Aritmética y Algebra.* Representación gráfica de la función $y = \alpha^2$. Estudio de esta función: su variación. Igual estudio para la función $y = {}_a\alpha^2$ (caída de los cuerpos, espacio y velocidad). Estudio de las funciones $y = \frac{1}{\alpha}$,, $y = \frac{a}{\alpha}$. Su representación gráfica. Aplicación de la ley de Mariotte. Principales propiedades de las progresiones aritméticas y geométricas. Uso de las tablas de logaritmos de 4 ó 5 decimales. Uso de las tablas logaritmotrigonométricas.

Nota. La mitad del tiempo debe ser consagrada, como el curso anterior, a ejercicios.

Geometría. Geometría del espacio. El plano y la línea recta en el espacio. Rectas y planos perpendiculares y paralelos. Angulos diedros, triedros y poliedros. Volumen de un paralelepípedo rectángulo. Fórmulas del volumen del prisma y de la pirámide. Cuerpos redondos. Superficie y volumen del cilindro y del cono. Esfera, sección plana y plano tangente a la esfera. Area de la zona. Area y volumen de la esfera.

3. Los libros.—Aquí, como en las escuelas primarias, existe un libro de texto para cada asignatura, de cuyo contenido creemos interesante hacer notar lo siguiente:

Aritmética. Se estudian primeramente las propiedades de cada operación para *deducir* de ellas las reglas operatorias.

Se amplía y razona el cálculo rápido. Se acude a las representaciones gráficas para justificar los valores de $(a + b^2$ $(a - b)^2$ y $a^2 - b^2$, así como para la significación, propiedades y transformaciones de las fracciones. Se simplifica el estudio con supresiones como las siguientes: En la divisibilidad no se explica el método general ni los caracteres de 7 y 11. Se admite sin demostración la regla para reconocer si un número es primo y la uniformidad de la descomposición en factores. La conversión de las fracciones ordinarias en decimales se limita a obtener el cociente, sin estudiar las propiedades ni la conversión inversa.

Se aplica al estudio del movimiento uniforme.

Algebra. Acorde con el programa transcrito no estudia, por ejemplo, la división de polinomios; estudia las funciones pedidas y aun aumenta la $y = a\,\alpha^2 + b\,\alpha + e$; notándose en esta dirección la falta de la del sistema $\begin{array}{l} y' = a'\,\alpha + b' \\ y = a\,\alpha + b \end{array}$

Geometría. Nos encontramos con un texto que es muy superior al trabajo de clase, no obstante ser el profesor uno de los autores, evidenciando la dificultad de adaptar la teoría a la práctica, bien por hábitos propios, bien por no chocar con el medio, debiendo adaptarse a los métodos de los futuros examinadores. En este libro toda cuestión teórica está presentada *como un problema,* de cuya resolución nace el descubrimiento de una propiedad que se enuncia correctamente. Apela constantemente a

la intuición; así, por ejemplo, para el trazado de la perpendicular en un punto se sirve de una cartulina que dobla de manera adecuada; en cambio no estudia mediante las áreas las relaciones métricas del triángulo y el círculo. Simplifica notablemente la exposición, utilizando las simetrías, abandonando la proporcionalidad en la obtención de áreas, y no demostrando el volumen de la pirámide y su tronco. En el aspecto práctico estudia, por ejemplo, las proyecciones de los cuerpos y considera los valores aproximados en las medidas.

Además de la principalísima diferencia que le da con nuestros textos el tratar todas las materias como problemas a resolver, tiene otra muy importante, y es la adopción del movimiento, deslizamiento y rotación en la recta, deslizamiento y giro en el plano, que simplifica muchos razonamientos y coordina multitud de propiedades dispersas.

Hemos hallado el origen de este método en una obra del insigne geómetra monsieur Meray, decano de la Facultad de Ciencias de Dijon, titulada *Nouveaux éléments de Géometrie,* publicada en 1874, seguida por Borel y elogiada por Poincaré, que cambiaba por completo los fundamentos de la Geometría de acuerdo con su frase de que "es tan absurdo estudiar ahora la Geometría por Euclides, como lo sería reducir el Algebra a la de Diofanto. La línea recta no es para él, como admitió Poincaré, más que un eje de giro; toda la Geometría tiene por base los movimientos ya dichos, con la traslación paralela y la rotación en el espacio, definidos con todo rigor mediante varios postulados, en cambio de cuya admisión suprime el de Euclides, definiendo las rectas paralelas como dos posiciones de una misma recta que experimenta un deslizamiento en su plano, lo cual concuerda con el modo de trazarlos. El estudio de la obra de este autor, que sería interesantísima por constituír su método el llamado *moderno,* cae fuera de nuestro trabajo, por no ser todavía seguido en las Escuelas Normales.

4. Carácter de la enseñanza.—*a*). *Instrucciones oficiales.* Los programas deben ser considerados como tablas de materias;

el profesor tiene plena libertad para adoptar el orden que convenga y los procedimientos que le parezcan provechosos.

Los ejercicios han de ser numerosísimos y referirse a datos reales; las teorías serán completamente cortadas o reducidas a explicaciones sobre casos concretos. Lo que importa sobre todo es asegurar la precisión de los conocimientos adquiridos; una comprobación experimental podrá sustituír a una demostración rigurosa; bastará con que el alumno distinga claramente lo que postula de lo que demuestra por razonamiento.

El profesor utilizará con frecuencia las gráficas. Este procedimiento presta servicios preciosos, tanto en el estudio de los problemas de Física, como en muchos de Aritmética, e interesa mucho familiarizar a los alumnos con un procedimiento de representación, muy generalizado, de las dos magnitudes que son función una de otra.

Aritmética y Algebra. El curso deberá ser de una sencillez extrema: libre de desarrollos teóricos sobre la numeración, sobre las operaciones y la investigación del m. c. d. (método de las divisiones sucesivas). Contribuirá a dar a los alumnos precisión en el lenguaje y rigor en el razonamiento; pero sobre todo debe tender a proporcionar al alumno seguridad y rapidez en el cálculo.

Los problemas de Aritmética, cuya influencia educativa no es indiferente, tendrán la preferencia. Es esencial elegir bien los enunciados. Estos problemas se referirán a la vida corriente y a la social, al comercio, industria, artes y agricultura. Los datos comprobados cuidadosamente; sólo así puede el profesor llamar la atención sobre los errores del resultado, que el buen sentido puede evitar.

Los alumnos serán ejercitados en todo momento en la práctica del cálculo mental, muy útil en la vida y que constituye una excelente gimnasia para la viveza de espíritu.

Desde los primeros días se iniciará al alumno en las representaciones literales.

Geometría. El fin de su enseñanza es clasificar y precisar los conocimientos adquiridos por la observación, deducir de

ellos otros, y mostrar su aplicación a los problemas que se presentan en la vida. Se debe partir de la realidad para volver a ella. Se recomienda a los maestros relacionar la enseñanza de la Geometría con la del Dibujo y el trabajo manual. Muchos de los ejercicios de éste pueden servir para evidenciar verdades geométricas mediante una "Geometría experimental", pero nunca deberá faltar la demostración, ya que, por limitado que sea el saber del alumno, debe ser seguro y preciso: es necesario que adquiera cada vez mayor conciencia de la "certidumbre matemática".

b) Observaciones. Es de notar que las instrucciones oficiales están mejor orientadas que la realidad de la enseñanza. Esta tiene el defecto de tratar de seguir el desenvolvimiento lógico de la misma, dejando a un lado los recursos pedagógicos, de que, por otra parte, los alumnos parecen prescindir sin dificultad. Pocas gráficas, casi ningún cálculo mental, puntos de partida puramente teóricos, escasas aplicaciones. Pero entre las observaciones hechas figuran algunas que creemos útil exponer.

Marcha metódica progresiva. Se escoge una propiedad que sirva de base a una serie de ejercicios teóricos o prácticos; así, por ejemplo, estudiada la propiedad de la paralela media de un triángulo, se propone: 1.º Demostrar que la paralela media de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases. 2.º Que la parte de ella comprendida entre las diagonales es igual a la semidiferencia de las mismas. 3.º Punto de intersección de las medianas. 4.º Las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se cortan en partes iguales. 5.º Desde un ángulo y un punto en él, trazar una recta que quede dividida por él en dos partes iguales.

Marcha metódica regresiva. En las demostraciones de las propiedades se suele seguir el encadenamiento de algunas de ellas hasta llegar a la definición, axioma o postulado que le sirve de principio; en los problemas gráficos, utilizando sólo la regla y el compás, se hacen todas las construcciones necesarias, sin suponer ninguna, constituyendo estos ejercicios no

sólo un excelente reposo, sino que además permiten al alumno percibir el admirable enlace y dependencia de las verdades y construcciones, que se reducen a unas cuantas fundamentales.

Estudio completo de las cuestiones. Como ejemplo notable citaremos la resolución del siguiente problema: "Trazar una circunferencia que pase por dos puntos y sea tangente a una recta." Resolución, como indica la fig. 34, en donde aparecen

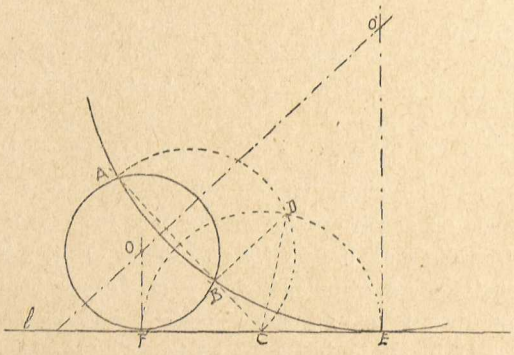


Fig. 34.

hechas las construcciones necesarias y consideradas las soluciones posibles.

Discusión. Caso general. A y B al mismo lado de *l;* nótese si no imposibilidad; la recta AB no ha de ser paralela a *l* y ninguno de los puntos ha de estar sobre *l.* Compárense las diferentes construcciones que dan la medida proporcional entre CA y CB para concluír que la propuesta es la mejor.

Casos particulares. 1.º B está en *l.* 2.º La recta AB es paralela a *l.*

Extensión. 1.ª Trazar una circunferencia que pase por un punto A y sea tangente a dos rectas *l* y *l'.* Redúcese al anterior tomando el simétrico de A con relación a la bisectriz del ángulo *l l'.* 2.ª Trazar una circunferencia tangente a un círculo y que pase por dos puntos dados. 3.ª Trabajo personal:

Hallar sobre una recta dada un punto que equidiste de una recta y un punto dados.

Hemos elegido este ejemplo entre varios porque nos permite comparar la enseñanza en varios centros. En la Escuela Normal del Sena presenciamos la exposición de este mismo problema, reducido a su resolución general. En nuestra Escuela Superior del Magisterio figuró en los exámenes de ingreso y no sabemos si hubo algún aspirante que lo resolviese, limitándose, si tal hubo, a considerar, como hacen nuestras Geometrías, una sola solución y sin hacer la construcción completa.

5. Comentario.—La enseñanza, si bien no muy entregada a la Pedagogía, ni excesivamente modernizada (falta algo del método Perry, de la notación general, de la correlación entre las tres ramas de la matemática elemental, de la Geometría del movimiento, de los conjuntos, de los conceptos modernos), tiene en manos de excelentes profesores una intensidad y un alcance extraordinarios, imposibles de superar en el mismo tiempo con cualesquiera otros métodos y que desde luego excede en la extensión a lo que aprenden nuestros alumnos de enseñanza secundaria, y en la intensión aventaja a nuestros estudios universitarios análogos (Geometría métrica y Análisis matemático, primer curso).

IV. La Escuela Normal.

1. Organización general.—Los alumnos de las Escuelas Normales se reclutan generalmente entre los alumnos de las Escuelas Primarias Superiores que han cursado los cuatro años de enseñanza general, si bien es suficiente aprobar en un examen de ingreso, de cuyo valor dan idea las siguientes cuestiones propuestas en él:

—Dividiendo 745 por 350 se obtienen 2 de cociente y 45 de resto. Se multiplica 745 por un cierto número entero n y se divide el producto $745 \times n$ por 350.

¿Cuál es la condición necesaria para que el cociente entero de esta división sea $2n$? ¿Y para que sea $2n + 1$? (París.)

—Un propietario emplea dos viñadores, a quienes paga parte en dinero y parte en vino, dándoles el mismo salario. Emplea al primero durante 45 días, y al segundo durante 60. Da al primero 144 frs. y 3,60 Hl. de vino y al segundo 240 frs. y 4 Hl. de vino. ¿Cuál es el valor de un Hl. de vino y cuál el importe de su jornal?

Aritmética. División: definiciones, diferentes casos, usos, teoremas relativos a la división, cálculo mental.

Sistema métrico. Medidas de peso y capacidad; unidades, múltiplos y submúltiplos; conversiones, medidas efectivas, usos.

Se han empapelado dos habitaciones de 3,40 m. de altura con rollos de papel de 50 cm. de ancho y 7 m. de largo. La segunda habitación es más ancha que la primera y tiene dos ventanas en vez de una. Estas ventanas son de 1,20 de anchas por 2,50 de altas. Averiguar en cuánto excede la anchura de la segunda a la de la primera; si se han necesitado 3 5/14 rollos más para empapelarla.

Dividir una circunferencia de radio $r = 8$ cm. en 6 partes iguales y unir los puntos de división de dos en dos para obtener una estrella hexagonal. 1.º Demostrar que su núcleo es un hexágono regular. 2.º Calcular el lado de éste en función de r. 3.º Evaluar el área de la estrella.

Todos los alumnos son internos, lo cual facilita la distribución del trabajo, que se hace con todo detalle al principio del curso, la vigilancia y auxilio en el estudio, y la imposición de sanciones por negligencias en éste.

Se estudian dos cursos de Aritmética, Geometría y Algebra durante los dos primeros años y uno de Cosmografía y otro de Descriptiva en el tercero. Las clases son unisemanales, de una hora, lo cual implica tres horas semanales de trabajo en clase en cada curso. Todas ellas a cargo de un solo profesor, que explica también la Física.

En las clases, además de las interrogaciones y problemas ordinarios, se interroga cada semana a tres o cuatro alumnos de modo especial, entregándoles un programa previo que ellos preparan libremente, y semanal o quincenalmente se propone

una composición enunciada con tres días de anticipación y de la que es ejemplo la siguiente:

1.º Calcular

$$x = \frac{a^5 b^2 \sqrt{2}}{c - d} \text{ siendo } a = 0{,}8764;\ b = 2{,}753;\ c = 42{,}575;\ d = 3{,}82$$

2.º Dada la ecuación $x^2 + (m - 2)x - (m + 2) = 0$

a) Demostrar que tiene raíces reales; *b*) calcular su suma y su producto; *c*) calcular $\alpha_1 + \alpha_2^2$; *d*) obtener el valor de *m* de modo que $(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = K$ sea un máximo. Existe un sistema de notas con el que se califican problemas y preguntas, comunicado al alumno, y que lleva consigo privación de recreo cuando la nota es inferior a 5, siendo 10 el máximo. Los alumnos retrasados tienen un repaso especial los jueves por el mismo profesor.

Los últimos meses del tercer curso se dedican a la resolución de problemas, por constituír éstos la principal dificultad del examen para la obtención de *Brevet Supérieur*, para la cual prepara la Escuela.

2. Los programas oficiales. *Primer curso.* Aritmética. Números enteros. Numeración decimal. Idea de una numeración de base distinta.—Teoremas sobre las sumas, diferencias y productos. Definición, teoría y reglas de la división de números enteros en menos de una unidad.—Caracteres de divisibilidad por 10; 2, 5, 9 y 3; 11, 100, 4, 25.—Números primos. Su serie es ilimitada. Formación de una tabla de números primos. Reconocer si un número dado es primo.

Descomposición de un número en factores primos. La descomposición es única. — Aplicaciones: divisores comunes y m. c. d.; múltiplos comunes y m. c. m. de dos números descompuestos en factores primos.—Máximo común divisor de dos números por el método de las divisiones sucesivas.—Números primos entre sí.

Algebra. Números positivos y negativos. Cálculo algebraico (operaciones estrictamente limitadas a las aplicaciones utilizables en los cursos de la Escuela Normal). Ecuación de primer grado: $a x = b$. Discusión. Problemas. Estudio de la fun-

ción $y = a\alpha$ y de la función $y = a\alpha + b$. Signo. Variación. Representación gráfica. Problemas. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (de primer grado). Discusión. Problemas. Representación gráfica de cada una de las ecuaciones.

Geometría. Línea recta. Circunferencia, ángulos. Triángulos, casos de igualdad. Paralelas. Paralelógramos. Vectores.—Cuerdas y arcos de círculos. Tangente. Medida de ángulos, grados sexagesimales y centesimales, radianes. Problemas de construcción.—Líneas proporcionales. Triángulos semejantes.—Polígonos semejantes y homotéticos.—Propiedades métricas en el triángulo y en el círculo. Ejercicios.—Medidas de áreas.—Nociones sobre los polígonos regulares.—Longitud de la circunferencia; área del círculo.

Segundo curso: Aritmética. Fracciones ordinarias. Fracciones irreductibles. Reducción de dos fracciones al mismo denominador y al mínimo denominador común.—Operaciones con las fracciones.—Productos de varios factores. Potencias.—Operaciones con números decimales.—Cociente en menos de $1/10^n$ de números enteros y decimales.—Fracciones decimales.—Conversión de una fracción ordinaria en fracción decimal. Nociones sumarias sobre las fracciones periódicas.—Raíz cuadrada en menos de $1/10^n$ de números enteros, fracciones decimales y ordinarias.—Razón de dos números. Proporción.—Razón de dos magnitudes de la misma especie. Nociones sobre la medida de magnitudes. Sistema M. T. S.—Nociones sumarias sobre las acciones, obligaciones, fondos públicos, cajas de ahorros, seguros y cheques.

Algebra. Ecuación de segundo grado con una incógnita. Suma y producto de las raíces.—Estudio de la función $y = \alpha^2$ y de la $y = a x^2 + b x + c$.—Representación gráfica. Variación de la función. Obtención del máximo.—Progresiones aritméticas; progresiones geométricas. Empleo de los logaritmos.—Interés compuesto y anualidades.

Geometría. Geometría del espacio.—El plano y la línea recta en el espacio.—Rectas y planos perpendiculares, rectas y planos paralelos.—Angulos diedros, triedros y poliedros.—Vo-

lumen del paralelepípedo rectángulo. Fórmulas del volumen del prisma, pirámide y tronco de pirámide. Definición de dos poliedros homotéticos. Relación de sus volúmenes.—Cuerpos redondos: Superficie y volumen del cilindro y del cono; tronco de cono.—Esfera, sección plana y plano tangente. Area de la zona. Area y volumen de la esfera.

Tercer curso. Trigonometría.—Uso de las líneas trigonométricas naturales.—Definición del seno, coseno y tangente de los ángulos inferiores a dos rectos.—Resolución de un triángulo. —Uso de las tablas logaritmotrigonométricas.

Planimetría. Polígono topográfico. Levantamiento de los detalles.—Dibujo del plano sobre el papel.—Escalas. Signos convencionales.—Plancheta y brújula.—Agrimensura. Operaciones sobre el terreno y evaluación de áreas. Problemas de agrimensura. Plano catastral.—Nivelación, nivel, mira. Registros Curvas de nivel.—Planos acotados. Escala de pendiente de una recta de un plano.—Planos y mapas topográficos. Lectura de los mapas topográficos.—Mapa del Estado Mayor francés.—Ejercicios sobre el terreno.

Cosmografía. La Tierra: su forma y sus dimensiones, sus movimientos, el día y la noche; los meridianos, los paralelos. Definición de las coordenadas geográficas.—La Luna.—Su magnitud aparente, su distancia, cómo se miden las distancias celestes; las fases de la Luna; constitución física; movimientos de la luna, las mareas.—El Sol.—Sus dimensiones, su distancia de la Tierra, su constitución física; su rotación, manchas solares. Hora media y hora legal. Husos horarios. Años, estaciones calendario.—Eclipses de Luna, eclipses de Sol.—Nociones sumarias sobre los planetas y los cometas. Las estrellas. Principales constelaciones; medida práctica de las coordinadas de una estrella; estrellas dobles y múltiples.—Nebulosas. Vía láctea.

Geometría descriptiva. Representación del punto, la recta y el plano en dos planos de proyección y en Geometría acotada.—Intersección de dos planos.—Intersección de una recta y un plano.—Cambio de plano, rotación, rebatimiento.—Recto y plano perpendiculares.—Determinación de la distancia de dos puntos,

de la distancia de un punto a un plano y a una recta, del ángulo de dos rectas, del ángulo de dos planos, del ángulo de recta y plano.—Representación por sus proyecciones de los cuerpos sólidos usuales: poliedros convexos, esfera, cilindro circular recto, cono y tronco de cono circular.

Además del dibujo geométrico en los dibujos manuales (cuatro horas semanales) se efectúa el tejido, plegado, cortado y trabajo en cartón para facilitar el estudio de las formas geométricas y el cálculo.

3. CARÁCTER DE LA ENSEÑANZA.—a). *Instrucciones oficiales.* Los programas oficiales se extienden en superficie y se completan sobre todo en profundidad por el empleo de un método más severo que el aplicado en los cursos complementarios y en las escuelas primarias superiores.

Los alumnos, desde su entrada en la Escuela Normal, tienen conocimientos bastante extensos y saben resolver problemas variados y difíciles; mas, por lo regular, ejecutan los ejercicios por hábito, de manera mecánica; les faltan las definiciones exactas y las demostraciones rigurosas.

En la corrección de los ejercicios el profesor enseñará a los alumnos a razonar exactamente, a no sustituír el razonamiento con la memoria.

Se ha de considerar la sencillez de los métodos de investigación y la multiplicidad de las aplicaciones. En realidad se reducen a tres, según que conduzcan a una relación algébrica de primer grado, o a un sistema, o a una relación de segundo grado. Así, por ejemplo, un problema de interés compuesto no se diferencia de un problema de dilatación.

Los problemas se diversificarán aún, utilizando datos de todo origen: Comercio, Higiene, Industria, Agricultura, Geometría física y química. El cálculo de las raciones necesarias a la alimentación del hombre o las cantidades de abono son una prolongación de la regla de las mezclas. Para extender su potencia a toda la Química la regla de tres no necesita sino de las fórmulas de reacción y la tabla de pesos atómicos.

Pero su objeto principal es ejercitar y fortificar la facultad

de razonar. En la Escuela Normal el profesor velará sobre todo porque los alumnos comprendan perfectamente las demostraciones. Evitando los cursos dictados, pondrá de relieve los puntos esenciales, expondrá con cuidado las partes delicadas, procurando siempre el orden, el encadenamiento, el rigor. Sin embargo, este cuidado del rigor no debe ser excesivo: el profesor podrá prescindir de las demostraciones demasiado difíciles. Lo importante es distinguir lo establecido por el razonamiento de lo que se ha admitido sin demostración.

En el primer año los estudios se adaptarán a la localidad. En un departamento en que dominen la Industria y el Comercio podrá prescindirse del levantamiento de planos y la agrimensura para sustituírlo por la Contabilidad; en los departamentos del litoral se dará la enseñanza de náutica, reduciendo la Geometría descriptiva.

b) *Observaciones.*—Comoquiera que las escuelas primarias superiores, rebasando sus programas oficiales, tratan a fondo la materia de los de las Normales, resulta que los alumnos de éstas conocen ya el programa, y el interés de profesores y alumnos es mediocre, sin que baste a estimularlo la diferencia de métodos que las prescripciones oficiales establecen entre unas y otras escuelas, y así hemos podido observar mayor rigor lógico y un estudio más preparado y detallado de las cuestiones en las Escuelas Superiores, como ya hemos hecho notar.

El uso de los libros recomendados por las disposiciones oficiales llega al abuso, dejando el profesor de escribir en la pizarra el cálculo correspondiente, siguiendo los alumnos la demostración en el libro.

Cabría aprovechar los conocimientos que traen los alumnos de la Escuela Normal especializándolos en la metodología de su enseñanza, estudiando incluso experimentalmente los mejores métodos y procedimientos; pero no se hace esto, quedando reducida esa parte profesional a las prácticas de enseñanza.

Sin embargo, entre lo observado, creemos dignos de mención los puntos siguientes:

Orientación realista de los problemas. — Los futuros maes-

tros, funcionarios públicos y probables secretarios de Ayuntamiento han de interesarse por cuestiones como éstas.

"Una persona contrata un seguro mixto durante *veinte* años por un capital de 10.000 frs., con participación en los beneficios. La prima anual es de 560 frs. Viviendo la persona al cabo de los 20 años percibe los 10.000 frs. más 300 frs. de beneficio. Calcular la suma que hubiese podido realizar si coloca la prima al 4 por 100."

Corresponde al caso de los funcionarios que no pueden dejar viudedad hasta los 45 años y se casan a los 25. La pérdida que aparece sirve para mostrar lo que se paga por el seguro.

"Una municipalidad tomó del Crédit Foncier 32.600 frs. para construír un grupo escolar, a pagar en 30 años al 5,25 por 100. Calcular el número de centésimas que deben votarse si la base es de 400 frs." (Una centésima de contribución le produce 400 frs. al Municipio.)

Relación del Algebra con la Aritmética y la Geometría.— Muestra cómo las cuestiones trazadas por estas ciencias pueden serlo con los métodos de aquélla, alcanzando gran extensión y generalidad. Ejemplos:

1.° Problema de las mezclas.

Precios de las cantidades mezcladas, a, b. c.
— de la mezcla,
Cantidades mezcladas x e y
— de mezcla n

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = n \\ x + b\,y = c\,n \end{array}\right\} \begin{array}{l} a\,x + a\,y = a\,n \\ a\,x + b\,y = cn \end{array}$$

siendo $a > b$, restando $(a - b)\,y = (a - e)\,n$ de donde $y = \dfrac{n\,(c - c)}{a - b}$ $x = \dfrac{n\,(c - b)}{a - b}$ por analogía.

Discusión:

Condiciones que han de reunir las incógnitas $x > o$ y $> o$ $\left.\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right\} < n$. satisfecha con las otras.

Casos:

$a > b$ $a - b > o$ habrá de ser. $\left\{\begin{array}{l} c - b > o \\ a - c > o \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} c > b \\ a > c \end{array}\right\}$ $a > c > b$, el precio de la mezcla comprendido entre ambos.

$a = b$ $x = y = \dfrac{n\,(c-b)}{a - b}$ si se verifica. $\left\{\begin{array}{l} c - b = o\; a - c = o\,.\; a = b = c\,.\; x = \frac{o}{o} \text{ indeterminado.} \\ c - b = o\,.\; - c \neq o\; a = b \neq c\,,\; x = \infty \text{ imposible.} \end{array}\right.$

$a < b$,, $a - b < o$ habrá de ser. $\left\{\begin{array}{l} c - b > o \\ a - c > o \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} b > c \\ c > o. \end{array}\right\}$ $b > c > a$.

2.° Determinar sobre un diámetro un punto tal que la cuerda perpendicular al diámetro en ese punto tenga una longitud dada. Si se toma como origen de abcisas el extremo del diámetro, siendo 2 c. la longitud de la cuerda, la ecuación que resuelve el problema es $x(2r - x) = c^2$; pueden existir soluciones negativas y el mayor valor que pueden tener es 2 *r*.

Si se toma el centro de la circunferencia por origen de abcisas la ecuación es $(r - x)(r + x) = c^2$; puede existir una raíz negativa, siendo el máximo de ambas *r*.

La Cosmografía. Siendo ésta una ciencia moderna se enseña como una modalidad, un sentido de la actualidad que es curioso, por mostrar cómo se refleja el carácter de una ciencia en su enseñanza, y puede servir de ejemplo la lección cuyo esquema damos.

Medición de la temperatura del Sol. Ley. "El producto de la temperatura absoluta por la longitud de onda de la radiación dominante (microns) es igual a 2940." Aplicación a determinar la temperatura de diferentes focos caloríficoluminosos. Temperatura del cubo de Leslie 100° = 373° absolutos; radiación dominante = 2940 : 373 = 99 μ.

La longitud de onda de la radiación dominante en la luz solar es 0,58 ; luego la temperatura del Sol será 2940 : 0,58 = 4800°.

Orígenes del calor solar. Pasada revista a las teorías existentes hasta la fecha: combustión, caída de materia cósmica, contracción, desintegración de la materia, se exponen las nuevas: 1.ª Reacciones químicas reversibles producidas por la gran presión que aumenta en 3500 kg. por cm² cada un kilómetro de profundidad, análogas a la síntesis del amoníaco; estos cuerpos, llevados a la superficie por las corrientes, se descomponen con explosión, produciendo enormes cantidades de calor y lanzamiento de materia a 9000 kms. de altura con velocidades de 860 kms. por segundo.

2.ª Otro origen de calor son las reacciones reversibles, análogas a la síntesis del ácido nítrico por el arco voltaico. Con estas bases los cálculos dan para vida probable del sol 4000 mi-

llones de años en vez de los 4000' que tendría si fuese carbón en combustión.

4. Las prácticas de enseñanza.—Los alumnos de los dos primeros cursos practican en las escuelas anejas durante tres períodos semanales cada año. Se dedica a las prácticas la mitad de la clase (unos 26 alumnos), libre de todo otro trabajo, mientras la otra mitad repasa con los profesores las asignaturas. De cada sección se encargan dos alumnos. Los de tercer año practican cuatro semanas en dos períodos.

El profesor de cada asignatura se presenta en las prácticas inopinadamente; toma sus notas, y cuando ha hecho observaciones sobre el trabajo de seis u ocho alumnos expone su opinión. Los mejores alumnos se encargan de lecciones modelo sobre temas de interés, que los demás escuchan (sin niños) y el profesor critica. Todo ello durante los tres primeros trimestres, en el tercer curso, porque el último es absorbido por el cuidado de preparar el examen para el *Brevet Supérieur*.

Por otra parte, el Reglamento de 1905 dispone que la adaptación de los conocimientos adquiridos a la escuela primaria se hará con: A. Explicación de los principios generales de la Metodología. B. Examen de programas de escuela primaria y su crítica. Ejemplos: La noción de fracción; cómo han de adquirirla los niños; programa detallado para los diferentes grados. —¿Deberán enseñarse los números decimales en el grado elemental? ¿En qué lugar? ¿En qué extensión?—C. Conocimiento de los números. Ejemplos: Importancia de los 10 primeros números.—Estudio del número 6.—Ejercicios de numeración.—D. Las operaciones de Aritmética. Ejemplos: Plazo detallado de una lección del curso elemental.—Elección de problemas para hacer comprender el uso y significado de la instrucción. Lección del curso medio sobre el uso de la división.—E. Resolución de problemas. Ejemplos: Selección. Naturaleza de los datos.—Resolución analítica. Regla de tres. Corrección de deberes.—F. Cultura de la facultad del razonamiento. Ejemplo: Explicación del mecanismo de las operaciones.—G. Cálculo mental. Principio, preparación, gradación.—H. Examen crítico de los libros de clase.

5. El Brevet Supérieur.—Constituye el fin de los estudios normales, aunque puede acudirse a él con estudios libres y con títulos muy variados, como el *Brevet* de enseñanza primaria superior, y la primera parte del bachillerato secundario.

En Matemáticas comprende: Un examen escrito, que consiste en la resolución en una hora de un problema de Aritmética o Algebra, y la de un problema de Geometría en hora y media. Un examen oral sobre el programa de las escuelas normales.

Como ejemplos que muestran el nivel de las cuestiones propuestas, presentaremos los siguientes:

Problemas. En un triángulo cualquiera ABC se juntan los puntos medios D y E de los datos CA y BC y se hace girar la figura alrededor de AB. Hallar la solución entre los volúmenes engendrados por el trapecio ADEB y por el triángulo ABC.

Un vaso tiene forma de cono. Se le pesa lleno de mercurio y lleno de agua. La diferencia entre ambos pesos es 720 gr. Calcular: 1.° El radio de la base, sabiendo que la altura es de 4 cm. 2.° El área lateral. (Densidad del mercurio, 13,6.)

Un comerciante se asocia con su primer empleado. Este se encarga de la gerencia y tendrá un sueldo de 3.000 frs. La aportación del comerciante se calcula en 40.000 frs. Las mercancías vendidas en el año son compradas a su principio por 80.000 frs., de los cuales paga 25.000 el empleado y el resto el comerciante. Los beneficios se reparten proporcionalmente a las ganancias de cada uno. Se pregunta cuál debe ser el tanto por ciento de ganancia para que el gerente perciba un total de 5.000 frs.

Cuestiones orales. ¿A qué se llama ecuaciones equivalentes? Las ecuaciones

$$x^2 + x = 9 + x,\ x^3 = 9x,\ x^2\sqrt{x-1} = 9\sqrt{x-1}$$

son equivalentes a la ecuación $x^2 = 9^2$.

¿Cómo se hallan los divisores comunes a 126, 144 y 216? ¿Cuál es su número?

6. Comentario.—La diferencia principal con nuestro plan de estudios es la existencia de la Geometría descriptiva, tan interesante en las artes, y el dibujo, y de la Cosmografía, indispensable para el conocimiento del mundo en que habitamos y la explicación de multitud de fenómenos importantísimos e interesantes para todos; sin ella no se concibe una mediana cultura general, por lo cual sería de desear se explicasen las dos materias en nuestras Normales.

Por lo demás, el plan de estudios, los métodos y los procedimientos no se especializan para la formación del futuro maestro. Tal vez se dirá que basta el conocimiento profundo de lo que ha de enseñarse, un poco de buen sentido y unos cuantos preceptos claros y precisos para poder enseñar a los niños. Los buenos resultados de la enseñanza primaria en Francia así parecen confirmarlo. Sin embargo, creemos que en vez de una repetición casi inútil de lo que ya saben los alumnos pudiera dirigirse la labor de éstos a estudiar a fondo las cuestiones de enseñanza y tal vez ello cambiaría el carácter de la escuela francesa, a nuestro juicio demasiado intelectualista y reglamentada.

V. Escuela Normal Superior de Saint Cloud.

1. Organización general.—Tiene por fin formar el profesorado de las Escuelas Normales y de las primarias superiores. Se ingresa en ella mediante un examen al que se presentan 250 aspirantes de diez y ocho a veinticinco años, de los que son admitidos unos 15. El programa de ingreso está constituído por la primera parte del "certificado de aptitud al profesorado de las Escuelas Normales y de las primarias superiores" (núm. 2). Los alumnos se especializan en secciones de Letras y Ciencias, y dentro de éstas en Matemáticas (con Física) y Naturales (con Física y Química). La enseñanza dura dos años, en los cuales se estudia: Matemáticas generales (Cálculo, Algebra, Trigonometría, Geometría analítica), dos clases semanales de hora y media. Geometría (comprendiendo la descriptiva) una

clase semanal de hora y media; Mecánica, una clase semanal de hora y media.

Los profesores pertenecen a la Universidad de París y cobran por sesiones.

Las materias enseñadas lo son con arreglo al programa citado en su segunda parte y los alumnos aprobados están dispensados de sufrir la segunda prueba, que comprende el certificado de aptitud para el profesorado.

2. Los programas.—*Primera parte.* Aritmética.—I. Números enteros. Numeración decimal.—Operaciones con los números enteros.—Productos de factores.—Potencias.—Divisibilidad por 2 y 5, 4 y 25, 9 y 3, 11.—II. Divisores comunes. Máximo común divisor.—Números primos entre sí. Teorema fundamental. — Múltiplos comunes. Mínimo común múltiplo. — III. Números primos. Teorema fundamental. Aplicaciones.—Descomposición en factores primos. Aplicaciones.—IV. Fracciones ordinarias. Condición de igualdad. Simplificación. Fracciones irreductibles.—Reducción a un común denominador.—Operaciones con las fracciones (recurriendo a las magnitudes).—V. Fracciones decimales. Números decimales. Operaciones.—Conversión de fracciones ordinarias en decimales.—Nociones sencillas sobre las fracciones decimales periódicas.—VI. Raíz cuadrada (enteros, fracciones ordinarias, decimales).—VII. Razón de los números. Proporciones.—Partes alícuotas comunes a dos magnitudes de la misma especie. Razón de dos magnitudes. Medida de una magnitud. La razón de dos magnitudes es igual a la de los números que las miden con la misma unidad.—Magnitudes proporcionales. Regla de tres.—VIII. Sistema métrico.—IX. Interés simple. Demostración directa de la fórmula $i = r \times a \times t$. Descuento.—Repartimientos proporcionales.—Problemas sobre mezclas y aleaciones.—X. Nociones sumarias sobre: Fondos públicos, acciones y obligaciones. Cajas de ahorro, seguro, cheques, cheques cruzados.

Algebra. Números positivos y negativos; definiciones y operaciones.—Ejemplo y aplicaciones.—Cálculo algebraico. División por $x - a$.—II. Ecuación del primer grado con una in-

cógnita. Discusión de la ecuación $a\,x = b$.—Desigualdades de primer grado.—Problemas de primer grado con una incógnita.—Estudio de la función $y = a\,x + b$; signo, variación, representación gráfica.—Estudio de las funciones $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$. Representación gráfica.—Ecuaciones de primer grado con varias incógnitas. Discusión del sistema $a\,x + b\,y = c$ $a'x$ $b'y = c'$. Problemas.—III. Ecuación de segundo grado con una incógnita. Empleo de la identidad.

$$x^2 + p\,x + 9 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - 9\right)$$

Suma y producto de las raíces.—Estudio de la función $y = a\,x^2 + b\,x + e$ atendiendo al signo. Desigualdades de segundo grado.—Variación de la función $y = a\,x^2 + b\,x + e$. Representación gráfica.—Problemas de segundo grado. Ecuación bicuadrada.—IV. Progresiones. Logaritmos. Uso de las tablas de logaritmos y de la regla de cálculo.—Intereses compuestos.—Anualidades.

Geometría. Geometría plana.—I. Noción de la recta. Segmento. Medida de su longitud. Orientación; sector y semirrecta.—Noción del plano. Descomposición del plano en dos regiones por una recta trazada en él. Superposición de un plano sobre otro o sobre sí mismo. Rotación de un plano alrededor de una de sus rectas. Simetría. Curso de un plano.

Angulo. Sentido de un ángulo. Adición y medida de ángulos. Adopción como unidad de una fracción de vuelta completa. Grados sexagesimales y centesimales. Angulo recto o de cuarto de vuelta. Angulos adyacentes. Bisetrices. Perpendiculares.

Triángulo isósceles. Su simetría. Triángulos cualesquiera. Casos de igualdad. Concordancia o discordancia del sentido de dos ángulos homólogos de dos triángulos iguales trazados en un mismo plano.

Teoría de las oblícuas.—Paralelas. El paralelismo de dos rectas se traduce por una igualdad de ángulos o de segmentos.—Suma de los ángulos de un triángulo.—Semirrectas pa-

ralelas y del mismo sentido o paralelas y de sentidos contrarios. Dos ángulos formados por semirrectas paralelas son iguales o suplementarios. Caso en que los lados de dos ángulos son perpendiculares.

Definición de una línea poligonal. Polígonos. Suma de los ángulos de un polígono convexo. Cuadriláteros convexos y cóncavos. Paralelógramos. Condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea paralelógramo; equivalencias de los diversos sistemas de condiciones.—Rectángulo. Rombo. Cuadrado. Contraparalelógramo.

Vectores. Sumas geométricas en el plano. Aplicaciones.

Número de condiciones necesarias para definir la forma de un polígono. Lugar geométrico del punto de encuentro de rectas. Ejemplo de rectas que pasan por un punto.

II. Círculo.—Simetría con relación a un diámetro. Arcos. Cuadrante. Adición y medida de arcos de una misma circunferencia. Grados sexagesimales y centesimales de arco.—Cuerdas y arcos.—Posiciones relativas de una recta y una circunferencia. Tangente (límite de una secante). Determinación de un círculo por tres de sus puntos o tres de sus tangentes.—Puntos comunes o dos circunferencias.—Circunferencias tangentes.—Porciones relativas de dos circunferencias.

Angulos centrales. Su proporcionalidad con los arcos interceptados.—Angulos inscritos. Relación ante el ángulo de dos cuerdas y los arcos que interceptan. Arco capaz de un ángulo dado. Lugar geométrico de los vértices de los ángulos iguales y del mismo sentido cuyos lados pasan, prolongados si es preciso, por dos puntos dados.

Tangentes trazadas desde un punto a una circunferencia. Tangentes comunes a dos circunferencias. Número de soluciones según la posición relativa de las dos circunferencias.—Cuadriláteros incompatibles y circunscriptibles.

La coexistencia en un plano de dos figuras iguales cuyos ángulos homólogos son del mimo sentido constituye un corrimiento. Este es una transformación por puntos. Corrimiento por traslación rectilínea y por rotación. Recíproco, en virtud

del cual todo corrimiento consiste en una rotación o, excepcionalmente, en una traslación rectilínea (Entiéndase que la noción de corrimiento no implica la de movimiento). Lugar geométrico de puntos. Ejemplos sencillos de envolventes, de rectas o círculos (estas envolventes pueden ser rectas, circunferencias o puntos). Aplicación de los lugares geométricos y los envolventes a problemas de construcción.—Construcción de triángulos en los tres casos de igualdad. Construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

III. Dos vectores situados sobre la misma recta tienen una relación positiva o negativa según que sean del mismo o de diferente sentido. Determinación de un punto sobre una recta por la relación de dos vectores que tienen en él su origen y sus extremos en dos puntos fijos de la recta. División armónica.—Segmentos de recta proporcionales.—Teorema de Tales. —Propiedades de las bisectrices de un ángulo de un triángulo. Dividen al lado opuesto armónicamente.

Triángulos semejantes. Casos de semejanza. Concordancia o discordancia de los ángulos homólogos de dos triángulos semejantes situados en un mismo plano.—Rectas que forman con dos lados de un triángulo otro semejante a él, con concordancia de los ángulos homólogos o sin ella. Rectas antiparalelas con relación a otras dos. Dos pares de rectas antiparalelas entre sí tienen sus bisectrices paralelas y determinan un cuadrilátero inscriptible. Recíprocos.

Polígonos semejantes con concordancia o discordancia del sentido de los ángulos homólogos (directa e inversamente semejantes). Puntos homólogos en el plano de dos polígonos semejantes. Noción general de la transformación y semejanza. Dos figuras semejantes a una tercera son semejantes entre sí. —Dos figuras directamente semejantes y que tienen dos vectores homólogos paralelos son homotéticas. Dos clases de homotecia según que los vectores homólogos paralelos sean del mismo o de contrario sentido. Polo de homotecia. Dos figuras homotéticas de una tercera son homotéticas entre sí. Dos figuras homotéticas de una tercera con la misma razón de se-

mejanza son iguales entre sí. Homotecia de dos y de tres circunferencias. Ejes de semejanza directa e inversa.

Dos vectores situados sobre una misma recta dan un producto positivo o negativo según que tengan el mismo o contrario sentido.—Propiedades métricas en el triángulo. Cálculo de ciertas líneas de un triángulo cuando se conocen sus lados.

Propiedades de las secantes trazadas a un círculo por un mismo punto.—Potencia de un punto con relación a un círculo. Sus diversas expresiones. Eje radical de dos círculos. Centro radical de tres círculos.—Determinación de un círculo por pasar por dos puntos y ser tangente a una recta o a un círculo, o por pasar por un punto y ser tangente a dos rectas.—Construír dos segmentos rectilíneos conociendo su media geométrica y su suma o su diferencia.—Lugares geométricos obtenidos en el estudio de las relaciones métricas.

IV. Areas. Areas iguales. Areas equivalentes. Medida de las áreas de dos polígonos. Relación de las áreas de dos polígonos convexos semejantes.—Fórmulas: $S = pr$ $S = (p - a) r_a$; $abc = 4 R S$.—Relación entre los cuadrados construídos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Contornos poligonales regulares. Su inscripción en una circunferencia. Caso en que el contorno es cerrado.—Polígonos regulares convexos. Lados del triángulo equilátero y del hexágono regular. Lados del cuadrado, octógono y decágono regular.— Longitud de la circunferencia. Area del círculo. Medida de un área de círculo tomando como unidad un arco igual al radio. Medida de un ángulo tomando por unidad el radian. Fórmulas: $l = r \omega$ $S = \frac{1}{2} r^2 \omega$, en donde w es la medida en radianes del ángulo en el centro.

Geometría del espacio. El plano y la línea recta en el espacio. —Rectas y planos perpendiculares, rectas y planos paralelos. Angulos diedros, triedros y poliedros.—Volumen del paralelepípedo rectángulo. Fórmulas del volumen del prisma, pirámide y tronco de pirámide.

Definición de dos poliedros homotéticos. Relación de volúmenes.

Cuerpos redondos. Superficie y volumen del cálculo y del cono, tronco de cono.—Esfera; sección plana y plano tangente a la esfera. Area de la zona. Area y volumen de la esfera.

Segunda parte. Algebra y análisis. Noción de límite.—Series numéricas. Series convergentes y divergentes. Series de términos positivos. Regla de d'Alembert. Regla de Canchy. Series absolutamente convergentes. Series alternadas. Límite del error cometido cuando se sustituye una serie convergente por la suma de sus n primeros términos. Ejemplos: el número e.

Formaciones de una variable. Exponentes fraccionarios. Definición de la función exponencial y de la función logarítmica. Logaritmos neperianos (Podrá admitirse que el número e es el límite de $(1 + \frac{1}{m})^m$ cuando m aumenta indefinidamente).

Pendiente de una curva con un punto dado. Derivada de una función. Derivada de una suma, un producto, un cociente y de una función de fracción. Derivada de un polinomio, de una fracción racional, de un radical de las funciones trigonométricas y de las inversas. Derivada de la función exponencial y de la logarítmica.—Uso de la derivada para el estudio de la variación de una función: máximos y mínimos. Significación del signo de la derivada segunda; puntos de inflexión. Fórmula de los incrementos finitos por medio de la interpretación geométrica. Hallar el número de ceros de una función continua $\int (x)$ en un intervalo (a, b) conociendo las raíces de la ecuación $\int' (x) = o$ en el mismo intervalo. Raíces múltiples. Cálculo aproximado de las raíces de una ecuación por el método de las partes proporcionales y por el de Newton. Desarrollos, en series ordenadas según las potencias de x de e^{α} sen α, cos α. Aplicaciones. (Podrán admitirse estos desarrollos sin demostración.)

Infinitamente pequeños de diversos órdenes. Parte principal. Ejemplos tomados de la Geometría. Existencia de las funciones primitivas, de una función continua, deducida de la noción del área plana. Empleo de los símbolos

$$\int_b^a \int (x)\, d_\rho \quad \int\int (x)\, d_\rho$$

Reglas prácticas para el cálculo de integrales: descomposición de una función $\int (\rho)$ en una suma de funciones integrables, cambio de variable, integración por partes, integración de polinomios y de las funciones.

$$\int_a^\alpha, \text{sen}\,\rho, \cos\alpha, \text{tg}\,\alpha, \frac{\int 1\,(\alpha)}{\int (\alpha)}, \frac{1}{(x-a)^m}; \frac{1}{1 \pm x^2}$$

$$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}, \quad \frac{1}{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + e}}$$

Cálculo aproximado de una integral definida por el método de los trapecios. Aplicación de las cuadraturas a la rectificación de curvas, al cálculo de un volumen cortado por planos paralelos, al cálculo del área de una superficie de revolución comprendida entre paralelas. Ejemplos tomados de los sólidos de la Geometría elemental.

Integración de las ecuaciones diferenciales de primer orden en el caso de que las variables sean inmediatamente separables o la ecuación es lineal.—Integración de la ecuación diferencial lineal de segundo orden y coeficientes constantes sin segundo miembro. Caso de un segundo miembro polinomio, exponencial, seno o coseno.

Trigonometría. Medida de ángulos tomando el radio como unidad de longitud; medida de los ángulos en radianes. Líneas trigonométricas de un arco o ángulo. Definición y variaciones. Arcos $-\alpha, \pi-\alpha, \pi+\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha$ arcos definidos por las ecuaciones $\cos\alpha = a$ $\text{sen}\,\alpha = a$ $\text{tg}\,\alpha = a$.

Relaciones entre las líneas trigonométricas de un mismo arco. Expresión del seno y coseno en función de la tangente. Líneas trigonométricas de algunos arcos.

Fórmulas de adición. Duplicación de arcos. Fórmulas

$$1 - \cos^2 a = 2\,\text{sen}^2 \frac{a}{2} \quad 1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$$

Expresión de sen a, cos a y tg a en función de tg $\frac{a}{2}$

Fórmulas de transformación para 2 sen a cos b, 2 cos a cos b, 2 sen a sen b, sen p + sen q, cos p + cos q.

Conociendo sen a o cos a calcular sen $\frac{a}{2}$ y cos $\frac{a}{2}$ Convocando tg a calcular tg $\frac{a}{2}$. Tablas de líneas trigonométricas naturales. Tablas logarítmicas de las líneas trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas simples. Resolución y discusión de la ecuación a cos x + b sen x = c. Fórmulas relativas a los triángulos. Resolución de triángulos. Aplicación de la Trigonometría al estudio de figuras de la Geometría plana.

Geometría analítica. Plano. Coordenadas cartesianas rectangulares. Cambio de ejes, distancia de dos puntos.—Ecuación de la recta. Rectas paralelas. Angulos de dos rectas. Rectas perpendiculares. Distancia de un punto a una recta. Coordenadas de un punto de una recta definida por dos puntos en función de un parámetro.

Ecuación de la circunferencia. Tangentes, polar de un punto, eje radical de dos circunferencias.—Estudio de la elipse y de la hipérbola referidas a sus ejes y de la parábola referida a su eje y su tangente en el vértice (tangentes, asíntotas de la hipérbola, polos y polares, diámetros conjugados, focos, directrices).

Coordenadas polares. Línea recta. Circunferencia que pasa por el polo. Cónicas con un foco en el polo.—Construcción de curvas dadas bajo una de las formas

$$y = \int (x) \quad r = \int (\theta) \quad \begin{cases} x = \int (t) \\ y = q\ (t) \end{cases}$$

Investigación de las asíntotas. Estudios con ejemplos de una curva representada por una ecuación de segundo grado en *xy*. Reducción por cambio de ejes.—Ejemplos de curvas: cicloide, epicicloides, hipocicloides, evolvente del círculo.

Envolvente de una familia de rectas o circunferencias que depende de un parámetro. Noción de curvatura. Evoluta de una curva.

Espacio. Coordenadas cartesianas rectangulares. Distancia de dos puntos. Cosenos directores. Angulos de dos direcciones. Direcciones rectangulares.—Ecuación del plano. Ecuaciones de la recta. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas

y planos.—Distancia de un punto a un plano.—Ecuación de la esfera.—Nociones sobre las curvas alabeadas (tangentes, planos tangentes, plano osculador) y sobre las superficies (plano tangente). Ejemplos. Hélice circular.

Geometría. *Complementos de Geometría plana.*—Transversales. Teoremas de Menelao y Ceva.—Cuadrilátero completo. Propiedad armónica de sus diagonales. Proyectividad de la proporción armónica. Haces armónicos.—Círculos octogonales. Haces de círculos.—Inversión, aplicaciones y ejercicios.—Cuerdas conjugadas en el círculo.—Polos y polares en el círculo. Nociones sobre las polares recíprocas.

Geometría del espacio.—Determinación del plano. Intersección de dos planos.—Intersección de una recta y un plano.—Posiciones relativas de dos rectas en el espacio. Rectas paralelas entre sí.—Rectas paralelas a un plano. Planos paralelos entre sí.—Angulo de dos direcciones en el espacio.—Rectas perpendiculares a un plano.—Oblicuas.

Angulo diedro. Angulo plano de un diedro. Sentido de rotación directa alrededor de un eje.—Diedro recto. Planos perpendiculares.

Proycciones octogonales. Angulo de recta y plano. Caso en que el ángulo recto se proyecta según un ángulo recto. Proyección sobre un plano de una área plana.

Angulos triedros. Desigualdades entre sus caras. Triedros suplementarios. Desigualdades entre triedros. Disposición de un triedro. Caso de igualdad o de simetría de dos triedros.

Sólidos en el espacio: Tetraedro. Superficies prismáticas y prismas de bases paralelas. Paralelepípedo oblicuo, recto y rectángulo. Tronco de pirámide de bases paralelas. Tronco de prisma. Octaedro.

Volúmenes iguales y equivalentes. Paralelepípedos recto y oblicuo. Prisma oblicuo.—Volumen de la pirámide. Equivalencia de los volúmenes de dos pirámides de igual altura y bases equivalentes.—Volumen del tronco de prisma.—Volumen del tronco de pirámide de bases paralelas. Equivalencia de dos volúmenes simétricos. Superficie cilíndrica de revolución. Estudio

geométrico. Plano tangente.—Cilindro recto de bases circulares. En área lateral y su volumen.—Superficie cónica de revolución. Estudio geométrico. Plano tangente. Cono de revolución, limitado en el vértice y de base circular. Area lateral y volumen.—Tronco de cono de revolución. Su área lateral y su volumen.

Esfera. Estudio geométrico. Intersección con una recta. Tangentes.—Plano tangente en un punto. Sección plana. Cono circunscrito. Cilindro circunscrito.—Arco y volumen de la esfera. Serie de teoremas preparatorios.

Sumas geométricas en el espacio. Proyecciones ortogonales. Traslación rectilínea. Composición de traslaciones rectilíneas. Rotaciones. Caso particular de la inversión, sus aplicaciones. Ejes binarios, ternarios, etc.

Semejanza en el espacio.—Figuras homotéticas. Aplicación a las esferas.

Curvas usuales. Elipse. Definición por sus focos. Sus simetrías. Vértices. Círculos directores de la elipse. Intersección de una recta y una elipse. Tangente a la elipse. Propiedades y problemas referentes a ella.—Una elipse es la proyección ortogonal de un círculo. Diámetros conjugados.—Directrices de la elipse.—Trazado mecánico de la elipse.

Parábola. Definición por el foco y la directriz. Trazado continuo de la curva. Eje y vértice. Intersección con una recta. Tangente a la parábola. Propiedades y problemas referentes a ella. Propiedad de la subnormal.

Hipérbola. Definición por sus focos. Sus simetrías. Vértices. Ramas.—Círculos directores. Intersección con una recta. Asíntotas. Propiedades de la tangente y problemas referentes a ella. Directrices.

Definición común de las tres secciones cónicas por medio de un foco y la directriz.—Teorema de Dandelin sobre las proyecciones planas de un cono de revolución. Aplicaciones sencillas de la proyectividad de la relación armónica o la extensión a las cónicas de ciertas propiedades del círculo.

Geometría descriptiva. Representación de un punto por sus proyecciones sobre dos planos rectangulares.—Representación de

una recta. Horizontales y verticales. Rectas de frente y verticales.—Representación de un plano. Casos particulares. Hornontales y líneas de frente de un plano. Uso de estas líneas en los diferentes problemas referentes a la Geometría del plano.—Intersección de dos planos. Casos particulares. Intersección directa y plano.—Recta perpendicular a un plano y problemas que a ella se refieren.—Método de los cambios de plano. Método del rebatimient.o.

Angulo de una recta con los planos de proyección.—Angulos de dos rectas. Angulo de dos planos. Casos particulares.—Proyecciones de un círculo.—Sección plana de un prisma o de una pirámide.—Representación de una esfera, un cono y un cilindro de revolución. Plano tangente a una esfera. Intersección con una recta o un plano. Cono circunscrito. Cilindro circunscrito. —Principios de la representación acotada. Punto, recta, plano; línea de máxima pendiente; escala de pendiente.—Solución de algunos problemas tratados por el método de los dos planos de proyección.—Líneas de nivel de una superficie. Indicaciones sumarias acerca de su empleo en los mapas topográficos.

Cosmografía.—Movimiento diurno. Eje del mundo. Concepción de la esfera celeste. Polos y ecuador celestes.—Ascensión recta y declinación de un astro. Estrellas y planetas. Meridiano de un lugar. Puntos cardinales. Altura y azimut. Descripción del teodolito. Angulo horario de un astro. Tiempo sideral.

Polos y ecuador terrestre. Paralelos y meridianos. Latitud y longitud geográfica. Milla marina. Nudo.

Movimiento propio del Sol. Eclíptica. Equinoccios. Solsticios. Zodíaco. Origen de las ascensiones rectas.—Variación del diámetro aparente del Sol. Trayectoria elíptica. Excentricidad. Primer sol ficticio. Ecuación del centro.—Variación de la ascensión recta del Sol. Reducción al ecuador. Sol medio. Tiempo medio. Año trópico. Calendario. Reforma gregoriana.

Indicaciones sobre la realidad del movimiento de la Tierra. El sistema solar. Planetas y satélites. Cometas. Leyes de Kepler. Atracción nestoriana. La Luna. Sus fases. Eclipses de Sol y de

Luna. Mareas. Nociones de Astronomía estelar. Constelaciones. Estrellas dobles y múltiples.

Mecánica.—Relatividad del movimiento, sistema de referencia. Trayectoria. La velocidad considerada como una magnitud algebraica. Caso del movimiento rectilíneo. Movimiento rectilíneo uniforme. Movimiento rectilíneo sinusoidal.—Aceleración en el movimiento rectilíneo. Movimiento acelerado y retardado. Movimiento uniformemente variado. Expresión en él del cuadrado de la velocidad en función del espacio; ídem para el movimiento sinusoidal.

Vector velocidad. Sus componentes. Ejemplo de movimiento circular uniforme. La proyección del movimiento circular uniforme sobre una recta es un movimiento sinusoidal.—Hodógrafo. Aceleración en el caso del movimiento rectilíneo. Ejemplo del movimiento circular uniforme. Aceleración centrípeta.—Movimiento helisoidal uniforme. Velocidad y aceleración.

Cambio del sistema de referencia. Teorema de la composición de velocidades. Aplicaciones. Expresión de la medida de la proyección de la velocidad de un móvil sobre el sector que junta un punto fijo al móvil.—Velocidad de elongación. Aplicación a la proyección de la elongación sobre la tangente.

Principio de la dinámica del punto material.—El producto por la masa del vector aceleración es un vector idéntico al que representa la fuerza motriz.—Aplicación a la caída de los cuerpos en el vacío, al movimiento de un punto material atraído por un centro fijo: 1.º Proporcionalmente a la distancia. 2.º Según la ley de Newton. Actuación al movimiento vertical de un punto pesado retenido por un hilo elástico.

Teorema de las fuerzas vivas en el caso de un punto material. Ilustraciones sacadas de los problemas anteriores.—Equilibrio de un punto material libre o no, con o sin frotamiento.—Equilibrio de una figura plana de forma invariable sometida a fuerzas que actúan en su plano. Ejemplo.

Cuestiones especiales: Senos y cosenos hiperbólicos; analogías con las líneas trigonométricas.

Derivadas parciales de una función de varias variables inde-

pendientes. Definición de la diferencial total de primer orden.

Integral curvilínea $\int\int (x, y)\, d\, x + g\, (x, y)\, d\, y$

Condición para que no dependa del camino recorrido, sino solamente de los extremos, las mismas cuestiones con tres variables.

Triángulos esféricos: fórmulas fundamentales.

Estudio, en Geometría analítica, de las superficies siguientes: Cilindro cuyas generatrices son paralelas a uno de los ejes; cono cuyo vértice está situado en el origen; superficies de revolución alrededor de uno de los ejes coordinados; elipsoide, paraboloide, hiperboloides, superficie alabeada de revolución, toro.

3. Carácter de la enseñanza.—El trabajo de clase se distribuye en días de explicación y días de preguntas. Un profesor agregado hace cada quince días preguntas sobre el programa en una sesión especial. No existen textos especiales indicándose los libros apropiados para cada cuestión.

Los alumnos se encargan de desarrollar ciertas cuestiones con libertad de elección en los métodos y con absoluta libertad en las aplicaciones.

Ello tiene un gran valor educativo porque constituye un estímulo, desarrolla la inventiva, el espíritu de análisis y el trabajo personal.

Terminada la exposición del alumno el profesor hace la crítica de su trabajo con gran rigor y minuciosidad, tratando de desarraigar ideas falsas o incompletas, insospechadas muchas veces, habitúa al alumno a reconocer sus errores y acostumbra al rigor científico.

La enseñanza de la mecánica la juzga monsieur Goursat, profesor de la Sorbona, agregado a Saint Cloud, como muy provechosa, como una aplicación importantísima de las Matemáticas puras, donde no hay sitio para la vaguedad ni para las generalizaciones sin alcance, evitando que se consideren las Matemáticas como un juego lógico.

El alto nivel alcanzado por la enseñanza de las Matemáticas en la formación del profesorado de las Escuelas Normales se halla justificado con las palabras de Meray: "Le futur profeseur ne sera maître de son metier avant de l'avoir vu de tres haut."

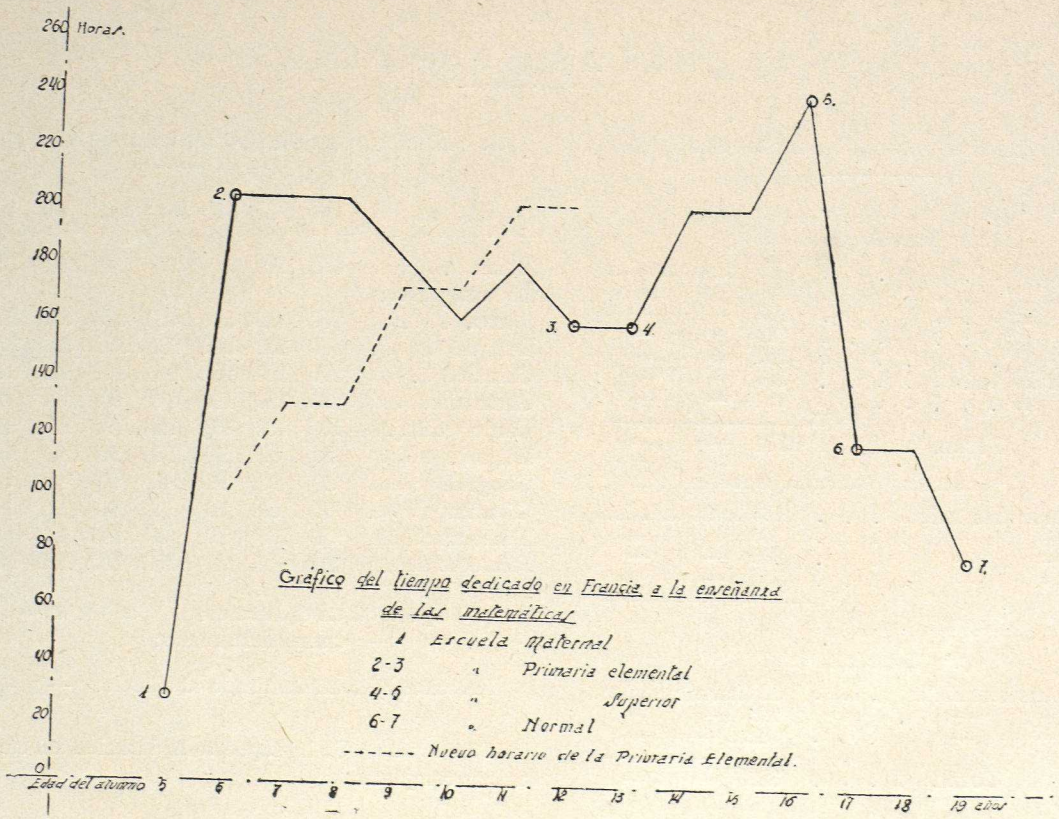


Gráfico del tiempo dedicado en Francia a la enseñanza de las matemáticas

1 Escuela Maternal
2-3 " Primaria elemental
4-5 " Superior
6-7 " Normal

------ Nuevo horario de la Primaria Elemental.

ESCUELAS FRANCESAS

I. Tiempo dedicado al cálculo.

1.º Escuela maternal, 30 horas anuales.

2.º Escuela primaria.

Preparatorio	205 horas anuales.		
Elemental 1.º	205	—	—
— 2.º	205	—	—
Medio 1.º	184	—	—
— 2.º	164	—	—
Superior B	184	—	—
— A	164	—	—
Total	1311	—	—

3.º Escuela primaria superior.

1.º 4 horas semanales	164 horas anuales.		
2.º 5 — —	205	—	—
3.º 5 — —	205	—	—
4.º 6 — —	246	—	—
Total	1220	—	—

4.º Escuela normal.

1.º 3 horas semanales,	123 horas anuales.		
2.º 3 — —	123	—	—
3.º 2 — —	82	—	—
Total	328	—	—

II. Empleo del tiempo en la Escuela primaria.

Secciones.	A	E-1.º	E-2.º	M-1.º	M-2.º	S-B	S-A	
Moral	450	90	75	90	90	90	120	minutos.
Lectura y escritura	260	450	390	420	375	300	240	—
Lengua	100	270	300	225	285	330	330	—
Cálculo	275	300	240	210	240	270	240	—
Gimnasia	135	150	150	90	90	60	60	—
Canto y dibujo	180	135	135	155	180	210	315	—
Historia	20	60	90	90	90	90	60	—
Geografía	20	90	90	90	90	90	60	—
Ciencias	90	60	60	90	90	90	120	—
Trab. manual	60	60	90	130	120	120	120	—
Recreo	210	135	180	150	150	150	135	—

Tiempo total en cada curso: $30^h \times 41 = 1230^h$

— — en los siete cursos: 8610^h

Fracción del total destinado al cálculo: $\frac{1}{5} > \frac{1311}{8610} > \frac{1}{6}$

Observación. Se ha supuesto la duración del curso de 41 semanas completas.

ESCUELAS ESPAÑOLAS

I. Tiempo dedicado al cálculo.

1.º *Escuela primaria.*

Sección 6.ª	201,15	horas	semanales.
— 5.ª	332,30	—	—
— 4.ª	271,15	—	—
— 3.ª	245,00	—	—
— 2.ª	218,45	—	—
— 1.ª . , . . .	233,20	—	—
Total.. . .	1502,05	—	—

2.º *Escuela Normal.*

1.er curso: 3 horas semanales.. . .	77	horas	anuales.
2.º — 3 — —	77	—	—
3.º — 3 — —	77	—	—
Total.	231	—	—

II. Empleo del tiempo en la Escuela primaria.

Secciones.	6.ª	5.ª	4.ª	3.ª	2.ª	1.ª		
Cálculo..	345	570	465	420	375	400	minutos	sem.
Lectura y escritura., ...	710	480	630	390	370	380	—	—
Ciencias, ...	120	100	75	140	75	150	—	—
Religión.	275	225	155	180	150	80	—	—
Geografía.	30	75	135	140	115	160	—	—
Lengua..	95	120	150	260	205	175	—	—
Historia.	—	55	30	80	90	190	—	—
Dibujo..	85	25	30	40	36	30	—	—
Derecho.	—	—	—	—	50	90	—	—
Descanso..	50	—	—	—	—	—	—	—

Total en los seis cursos. . . . . 5775 horas.

Fracción del total destinado al cálculo: $\frac{1}{3} > \frac{1502}{5775} > \frac{1}{4}$

Observación. Se han supuesto 250 días de clase en la Escuela primaria y 154 en la Normal.

BIBLIOGRAFIA

1.º Libros utilizados en las escuelas.

1. Pierrot et Biciulescu: *L'Arithmétique des petits, en images sans paroles.*—Paris, Natham, 1922.

2. Royer et Court: *Arithmétique* (3 cours).—Paris, Colin, 1922.

3. Mortreux: *Arithmétique practique et raisonnée* (3 cours).—Paris, Belin, 1922.

4. Bronet et Handricourt: *Arithmétique cour élémentaire.* Lib. et im. réunis.

5. *Le travail manuel à l'école primaire,* par Jully et Rocheron.—Paris, Belin, 1922.

6. *Classes de preapprentissage. Le travail manuel aux ateliers.* (Editado por la Dirección de Enseñanza del departamento del Sena.)

7. Bourlet et Desbrosses: *Arithmétique.*—Paris, Hachette, 1919.

8. Bourlet et Desbrosses: *Algèbre.*—Paris, Hachette, 1922.

9. Cheunevier et Desbrosses: *Géometrie.*—Paris, Hachette, 1922.

10. Bourlet et Boudoin: *Algèbre.*—Paris, Hachette, 1922.

11. Royer. *Arithmétique des Écoles Primaires Supérieures.*—Paris, Colin.

12. Royer: *Arithmétique des Écoles Normales et des Candidats au Brevet Supérieur.*—Paris, Colin.

13. Jacquet et Dalclef: *Cours d'arithmétique pour les Écoles Normales et Primaires Supérieures et pour le Prevet Supérieur.*—Nathan, 1921.

14. Jacquet et Dalclef: *Eléments d'Algèbre pour les Écoles Primaires Supérieures et les Écoles Normales.*—Nathan, 1921.

15. Bourlet (Carlo): *Géometrie* (*Méthode moderne*).—Hachette.

16. Grignon: *Cosmographie. Écoles Normales.*—Vuibert, 1920.

17. Borel: *L'Arithmétique.*—Colin, 1906.

18. Borel *La Géometrie.*—Colin, 1906.

19. Borel: *L'Algèbre.*—Colin, 1906.

20. *Choix des sujets donnés aux examens du Certificat d'Études Primaires élémentaires.*—Vuibert, Paris.

21. *Choix des sujets donnés aux examens des Prevets de Capacité.*—Vuibert.

22. Aymar: *Le problème aux Brevets de capacité et dans l'enseignement primaire supérieur.* Lib. et imp. réunis (Livre de l'élève et du maître).

23. Lemoine et Aymar: *La Teorie aux Brevet de Capacité,* Id.

2.º LIBROS ÚTILES POR SUS INDICACIONES METODOLÓGICAS.

1. Beauvissage: *La méthode d'observation fondée sur l'Arithmétique et la Géometrie concréte.*—Alcan. 1902.

2. Laisant: *Iniciacion matemática.*—Paris, Bouret, 1917.

3. Laisant: *L'enseignement du calcul. Conseils aux Instituteurs.* —1900.

4. Camescasse: *L'Iniciateur mathématique.*

5. Tabereau: *Exposé de la méthode.*—1863.

6. *Tableaux de Géometrie plane enployés à l'école primaire supérieure de Lille.*—1881.

7. Macé: *Arithmétique du grand papa.*—1862.

8. Marie: *Petit cours méthodique de Géometrie expérimentale.*

9. Rouma: *Le calcul par l'image.*—1911.

10. Dausat: *Éléments de méthodologie mathématique.*—1900.

11. Poincaré (Hadamar): *L'enseignement des sciences mathématiques.*—1904.

12. Borel: *Les exercices pratiques dans l'enseignement secondaire.*—1904.

13. Meray: *Considerations sur l'esseignement des mathématiques.*—1892.

14. Bioche: *L'Enseignement primaire et secondaire.* Commission international de l'enseignement mathématique.—1911.

15. Clairaut: *Éléments de Géometrie.*—1861.

16. Meray: *Nouveaux éléments de Géometrie.*—1874.

3.º REVISTAS.

1. *L'Education Enfantine.* Bulletin paraisent tous les 20 jours. —Nathan, éditeur.

2. *Le Brevet Élémentaire.* Bulletin bimensuel. Id.

3. *Le Nouveau Brevet Supérieur.* Bulletin mensuel. Id.

4. *Le Certificat d'Aptitud Pédagogique.* Id. id.

5. *Le Travail manuel, les Sciences expérimentales et le cinéma à l'école.* Id.

6. *Journal des Instituteurs et des Institutrices.* Semanal. Id.

7. *Manuel général de l'Instruction primaire.* Semanal.—Hachette, éditeur.

8. *Bulletin de la Société Alfred Binet.* Bulletin paraisent tous les deux mois.

9. *L'Education.* Revue mensuel.

10. *Le Journal des Mathématiques Élémentaires.* Quincenal.—Vuibert.

11. *L'Education Mathématique.* Id. Vuibert.

12. *Le Journal des Examens.* Semanal.—Lib. et imp. réunis.

INDICE

PÁGS.

Preliminar..... 3

I. Las Escuelas Maternales.

1. Impresión general..... 3
2. Programas oficiales..... 4
3. Tipos de escuelas..... 4
4. Organización general..... 5
5. El programa..... 6
6. Su distribución..... 6
7. Los procedimientos y el material..... 7
8. Ejercicios..... 12
9. Comentario..... 13

II. La Escuela Primaria.

Caracteres generales.

1. Graduación..... 14
2. Horario..... 15
3. El tiempo..... 15
4. Fines y método..... 16
5. Los procedimientos..... 18
6. Los ejercicios prácticos..... 22
7. El cálculo mental..... 24
8. El material..... 25
9. Los libros..... 26
10. El certificado de Estudios Primarios..... 28

Los grados de la Esc. Primaria.

1. Sección preparatoria. El programa oficial. Una lección. 31
2. Grado elemental. El programa oficial. El plan. La lección..... 33
3. Grado medio. Id..... 36
4. Grado superior. Id..... 40
6. El curso de "pre-aprentissage"..... 43
6. El trabajo manual: Programas y ejercicios..... 44
7. Comentario..... 49

III. Escuelas Primarias Superiores.

1. Caracteres generales..... 50
2. Programas oficiales..... 52
3. Los libros..... 55
4. Carácter de la enseñanza... 56
5. Comentario..... 60

IV. La Escuela Normal.

1. Organización general..... 60
2. Programas oficiales..... 62
3. Carácter de la enseñanza... 65
4. Las prácticas de enseñanza... 70
5. El Brevet Superieur..... 71
6. Comentario..... 72

V. La Escuela Normal Superior de Saint Cloud.

1. Organización general..... 72
2. Los programas..... 73
3. Carácter de la enseñanza... 85

Gráfico referente al mismo. 87

Cuadros relativos al empleo del tiempo..... 88 y 89

Bibliografía..... 91

Indice..... 95